



Pregunta teórica

Pregunta 1:

Enunciar todas las hipótesis para pórticos de nudos indesplazables. Demostrar la forma matricial de las ecuaciones que generan los nomogramas (o formulas aproximadas) deducidas de las hipótesis anteriores para dichos pórticos.

Pregunta 2:

Deducir las fórmulas de las tensiones rasantes debidas a cortante en secciones cerradas unielulares de pared delgada.

Ejercicio 1

Los tableros de los puentes consisten en la parte estructural por la que circulan los vehículos o personas. El tablero del puente ($E=30$ GPa, $\nu=0.2$) cuya planta se indica en la Figura 1 (unidades en metros y a eje), se compone de una viga cajón como la indicada en la Figura 2 (unidades en centímetros y a eje). La misma se apoya en cuatro pilares. Para su dimensionamiento se estudian ciertas hipótesis de carga, siendo una de ellas la situación donde solo la mitad del tablero está cargado con una carga $q = 10$ kN/m².

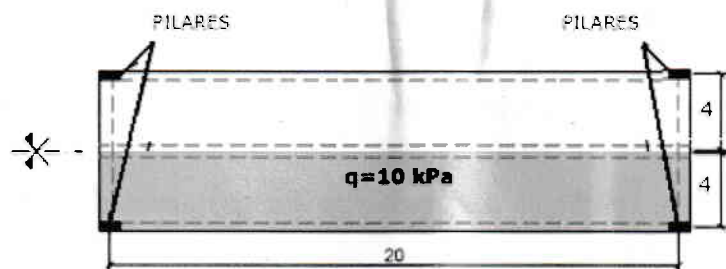


Figura 1

Para la hipótesis de carga estudiada:

- Indicar el esquema estructural de la viga cajón y obtener los diagramas de solicitaciones de la viga cajón y las reacciones en los apoyos.
- Determinar las máximas tensiones normales y rasantes producidas por dichas solicitaciones e indicar dónde se dan.

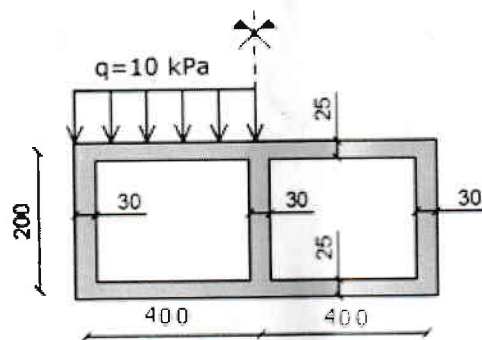
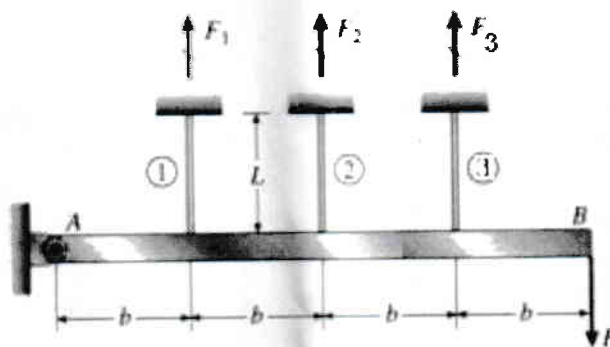


Figura 2

Ejercicio 2

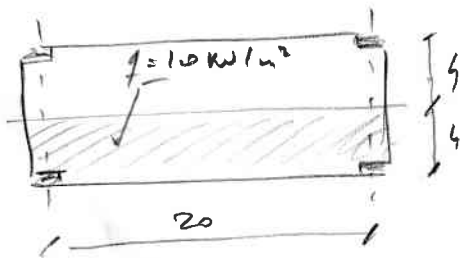


La estructura de la figura, consiste en una viga horizontal AB (que se supone rígida) soportada por tres barras idénticas (barras 1, 2 y 3) fabricadas con un material elastoplástico perfecto.

La longitud de las barras es L , y su área transversal A ; el material tiene tensión de fluencia σ_f y módulo de elasticidad E . La longitud de la viga es $4b$ y soporta una carga P en su extremo B.

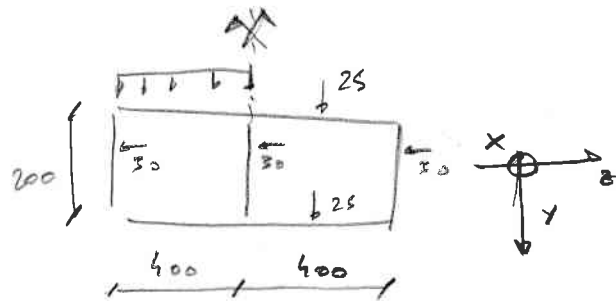
- Determinar la carga P_p , para la cual una de las barras plastifica, y el correspondiente desplazamiento en el extremo B de la barra.
- Determinar la carga P_c de colapso de la estructura y el desplazamiento del extremo B inmediatamente anterior al colapso.
- Si cuando se alcanza la carga de colapso P_c , se descarga totalmente la estructura determinar las tensiones y los desplazamientos residuales en el extremo B.

Esercizio 1 - Examen Julio 2022

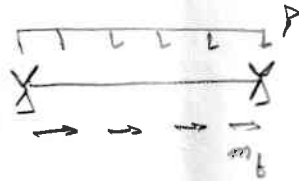


$$E = 30674$$

$$I = 0.20$$



1) ESQUEMA ESTRUCTURAL:



$$B = 4 + 0.15 = 4.15 \text{ m}$$

$$e = B/2 = 2.075 \text{ m}$$

$$P = qB = 41.5 \text{ kN/m}$$

$$m_b = Pe = 86.1 \text{ kNm/m}$$

DIAGRAMA DE SOLICITACIONES:



Reacciones:

$$R_u = 41.5 \text{ kN}$$

$$R_b = 86.1 \text{ kNm}$$

B) Sección Corner $\Rightarrow \Pi_{\text{verson}} \approx 0 \Rightarrow \sigma_x$ solo por Π_y

Máxima Tensión Normal:

$$I_z \approx \frac{30 \cdot 200^3 \cdot 3}{12} + \frac{800 \cdot 25^3 \cdot 2}{12} + 800 \cdot 25 \cdot (200/2)^2 \cdot 2$$

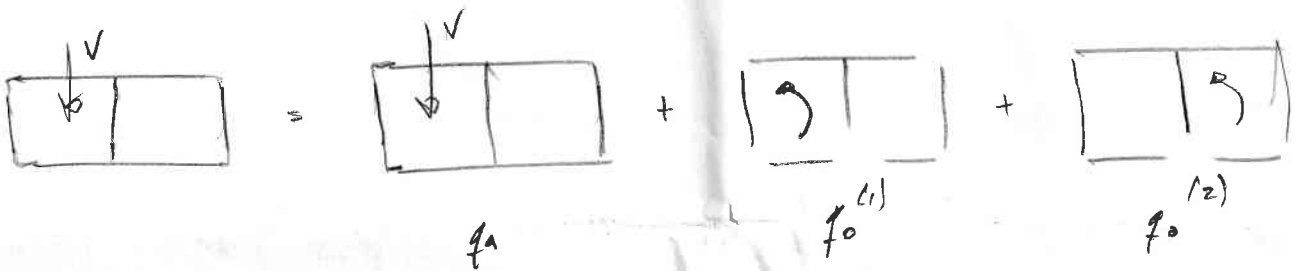
$$I_z \approx 4.62 \text{ m}^4$$

$$\Rightarrow \sigma_x = \frac{\Pi_y (1 + 0.25/2)}{I_z} = 0.51 \Pi_y \Rightarrow \boxed{\sigma_x = 0.51 \Pi_y}$$

Máxima Tensión Resente:



CONDICIONES:



CONDICIONES DE COMPATIBILIDAD $\rightarrow$

$$\begin{cases} \delta_a + \delta_{o1}^{(1)} + \delta_{o2}^{(1)} = 0 \\ \delta_a + \delta_{o1}^{(2)} + \delta_{o2}^{(2)} = 0 \end{cases}$$

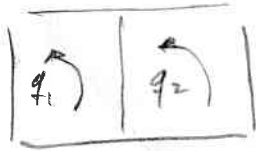
$$\Rightarrow \frac{1}{4} \int_{l_1} q_a \frac{ds}{E(s)} + \frac{1}{4} \int_{l_1} \frac{q_0^{(1)}}{E(s)} ds - \frac{1}{4} \int_{l_{12}} \frac{q_0^{(2)}}{E(s)} ds = 0$$

$$\frac{1}{4} \int_{l_2} \frac{q_a ds}{E(s)} + \frac{1}{4} \int_{l_2} \frac{q_0^{(2)}}{E(s)} ds - \frac{1}{4} \int_{l_{12}} \frac{q_0^{(1)}}{E(s)} ds = 0$$

$$q_a = \frac{-V q_0}{I_z}$$

OBS: Por simetría $q_0^{(1)} = q_0^{(2)} = q_0$

Normal Tension:



Por simetría $q_1 = q_2 = q$

$$\Rightarrow \int \frac{q_i ds}{e_i} - \sum f_j \int \frac{ds}{\Gamma_j e_j} = 240 \Delta_i$$

$$\Rightarrow q \left(\frac{4.2}{0.25} + \frac{2.2}{0.30} \right) - \frac{q \cdot 2}{0.30} = 240 \cdot 8$$

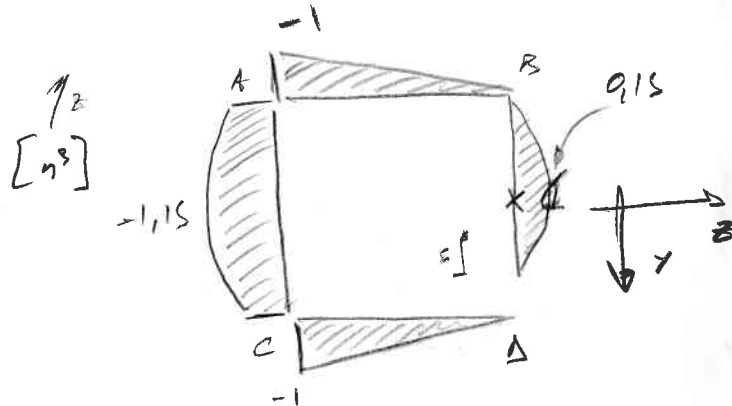
$$\Rightarrow (48.33 - 6.67)q = 1680 \rightarrow \boxed{q = 0.4160}$$

$$\Gamma_b = \sum 2q \Delta_i = 240 [0.418 \cdot 2] = 8.5640$$

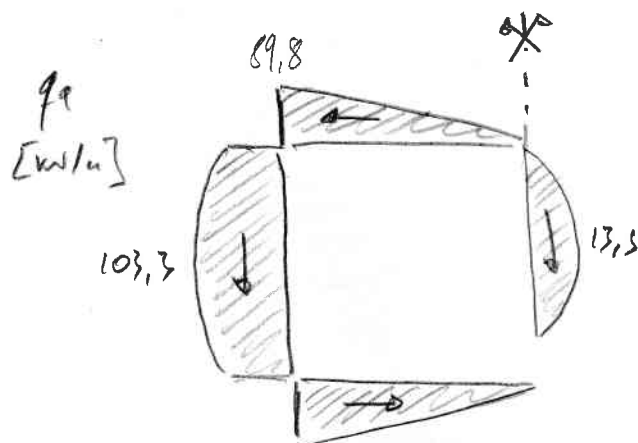
$$\Rightarrow \epsilon_0 = \frac{\sigma_b}{8.56} = 100.58 \frac{\text{kJ}}{\text{m}^2} \Rightarrow q = 41.2 \text{ kJ/m} \rightarrow \underline{\text{UNIFORME}}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow q_{\text{ext}} &= 37.2 + 41.2 = 78.4 \text{ kJ/m} \rightarrow \sigma = 78.4 / 0.28 = 313.6 \text{ kPa} \\ q_{\text{int}} &= 50.7 + 41.2 = 91.9 \text{ kJ/m} \rightarrow \sigma = 91.9 / 0.3 = 306.3 \text{ kPa} \\ q_{\text{MT}} &= 66.1 \text{ kJ/m} \rightarrow \sigma = 66.1 / 0.3 = 220.3 \text{ kPa} \end{aligned}$$





$$\begin{aligned} \gamma_B^{AB}(s) &= -0,25s \cdot 1 \rightarrow \gamma_B^{AB}(s=4) = -1 \text{ m}^3 \\ \gamma_B^{BC}(s) &= -1 + 0,3s(-1 + s/2) \rightarrow \gamma_B^{BC}(s=1) = -1,15 \\ \gamma_B^{BC}(s=2) &= -1 \text{ m}^3 \\ \gamma_B^{CD}(s) &= -1 + 0,25s \cdot 1 \rightarrow \gamma_B^{CD}(s=4) = 0 \text{ m}^3 \\ \gamma_B^{DA}(s) &= 0,3s(1 - s/2) \rightarrow \gamma_B^{DA}(s=1) = 0,15 \text{ m}^3 \end{aligned}$$



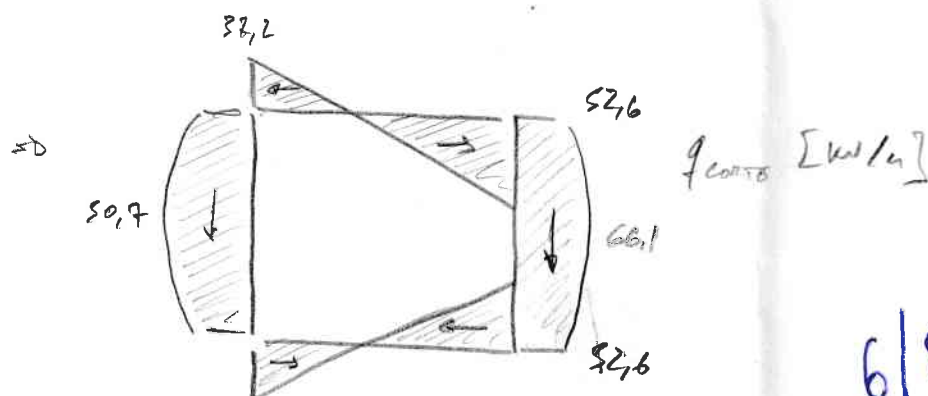
$$\oint_G \frac{q_1 ds}{EI(s)} = \frac{89,8 \cdot 4 \cdot 2}{0,252} + \frac{89,8 \cdot 2}{0,3} = 2039,47$$

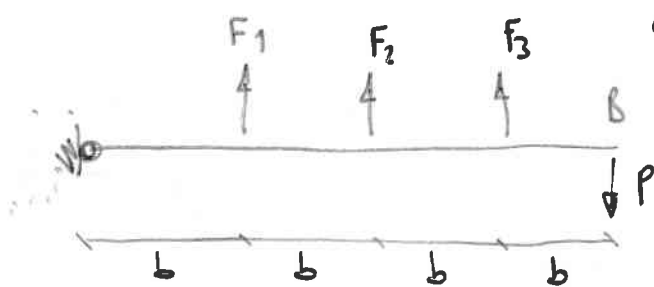
$$\oint_G \frac{ds}{EI(s)} = \frac{(4+4)}{0,25} + \frac{(2+2)}{0,3} = 45,33$$

$$\oint_{\Gamma_{12}} \frac{ds}{EI(s)} = \frac{2}{0,3} = 6,67$$

$$\Rightarrow \text{SISTEMA: } 45,33 q_0 - 6,67 q_0 = -2039,47 \Rightarrow 38,67 q_0 = -2039,47$$

$$\Rightarrow \boxed{q_0 = -52,6 \text{ kN/m}}$$





$$a) \sum \uparrow A = 0 \rightarrow (F_1 + 2F_2 + 3F_3) = 4P$$

$$\rightarrow F_1 = 4P - 2F_2 - 3F_3 \quad \text{Ec. eq.}$$



$$2^{\text{da}} \text{ hip.} \quad E_{\text{ext}} = \frac{L}{2EA} (F_1^2 + F_2^2 + F_3^2) \rightarrow E_{\text{ext}} = \frac{L}{2EA} [(4P - 2F_2 - 3F_3)^2 + F_2^2 + F_3^2]$$

$$\frac{\partial E_{\text{ext}}}{\partial F_2} = 0 \rightarrow \frac{L}{2EA} [2(4P - 2F_2 - 3F_3)(-2) + 2F_2] = 0 \rightarrow -8P + 4F_2 + 6F_3 + F_2 = 0$$

$$\rightarrow 5F_2 + 6F_3 - 8P = 0 \quad (I)$$

$$\frac{\partial E_{\text{ext}}}{\partial F_3} = 0 \rightarrow \frac{L}{2EA} [2(4P - 2F_2 - 3F_3)(-3) + 2F_3] = 0 \rightarrow -12P + 6F_2 + 9F_3 + F_3 = 0 \rightarrow 3F_2 + 5F_3 - 6P = 0 \quad (II)$$

$$-\frac{5}{6}(I) + (II) = 0 \Rightarrow -\frac{25}{6}F_2 + \frac{40}{6}P - 6P + 3F_2 = 0 \Rightarrow \frac{4}{6}P = \frac{7}{6}F_2 \Rightarrow F_2 = \frac{4}{7}P$$

$$(I) \Rightarrow \frac{20}{7}P - 8P + 6F_3 = 0 \Rightarrow \frac{36}{7}P = 8F_3 \Rightarrow F_3 = \frac{6}{7}P$$

$$\text{Ec. eq.} \Rightarrow F_1 = 4P - \frac{8}{7}P - \frac{18}{7}P \Rightarrow F_1 = \frac{2}{7}P$$

$$\Delta \text{ Fluye } 1^{\text{a}} F_3$$

$$\Rightarrow F_3 = \sqrt{f1} \cdot A = \frac{6}{7}P \Rightarrow P_P = \frac{7}{6} \sqrt{f1} A \Rightarrow \sqrt{f1} = E \frac{\delta_{3a}}{L} \Rightarrow \delta_{3a} = \frac{\sqrt{f1}}{E} \cdot L$$

$$\rightarrow \frac{\delta_{Ba}}{4b} = \frac{\delta_{3a}}{3b} \rightarrow \delta_{Ba} = \frac{4}{3} \delta_{3a} \rightarrow \delta_{Ba} = \frac{4}{3} \frac{\sqrt{f1}}{E} \cdot L$$

$$b) F_n = E_{\text{ext}} + F_3 \delta p_3$$

$$\frac{\partial F_n}{\partial F_2} = 12 \text{ en } a) = 0 \Rightarrow 5F_2 + 6F_3 - 8P = 0, \text{ Ec. eq.} \Rightarrow 3F_3 = 4P - 2F_2 - F_1$$

$$5F_2 + 8P - 4F_2 - 2F_1 - 8P = 0 \Rightarrow F_2 = 2F_1 \Rightarrow \text{Fluye } 2^{\text{da}} F_2 \text{ y } 3^{\text{ra}} F_1$$

Como la barra 1 siempre está en zona elástica

$$\Rightarrow \frac{\delta_{1b}}{L} E = \sqrt{f1} \Rightarrow \delta_{1b} = \frac{\sqrt{f1}}{E} L \rightarrow \frac{\delta_{Bb}}{4} = \frac{\delta_{1b}}{1} \Rightarrow \delta_{Bb} = 4 \frac{\sqrt{f1}}{E} L$$

7/8

b) P_c se la van los 3 barras llegan a $\nabla f l \Rightarrow$ Ec. eq $\Rightarrow P_c = \frac{\nabla f l \cdot A}{4} (1+2+3)$

$\Rightarrow P_c = \left(\frac{3}{2} \nabla f l \cdot A \right)$
 $\dots \left(\frac{3}{2} = 1,5 \right)$



c) $F_H = E \nabla e v + F_3 \delta p_3 + F_2 \delta p_2$

$\frac{\partial F_H}{\partial F_2} = 0 \rightarrow \frac{L}{EA} (5F_2 + 6F_3 - 8P) + \delta p_2 = 0$

$\frac{\partial F_H}{\partial F_3} = 0 \rightarrow \frac{L}{EA} (6F_2 + 10F_3 - 12P) + \delta p_3 = 0$

Cuando $P_c = 3/2 \nabla f l \cdot A \Rightarrow F_1 = F_2 = F_3 = \nabla f l \cdot A \rightarrow \delta p_2 = \frac{L}{EA} (12 - 6 - 5) \nabla f l \cdot A \rightarrow \delta p_2 = \frac{\nabla f l \cdot L}{E}$

$\delta p_3 = \frac{L}{EA} (18 - 10 - 6) \nabla f l \cdot A \Rightarrow \delta p_3 = \frac{2 \nabla f l \cdot L}{E}$

Cuando $P = 0$ $\frac{L}{EA} (5F_2 + 6F_3) + \frac{\nabla f l \cdot L}{E} = 0 \rightarrow 5F_2 + 6F_3 + \nabla f l \cdot A = 0$ (A)

$\frac{L}{EA} (6F_2 + 10F_3) + 2 \frac{\nabla f l \cdot L}{E} = 0 \rightarrow 3F_2 + 5F_3 + \nabla f l \cdot A = 0$ (B)

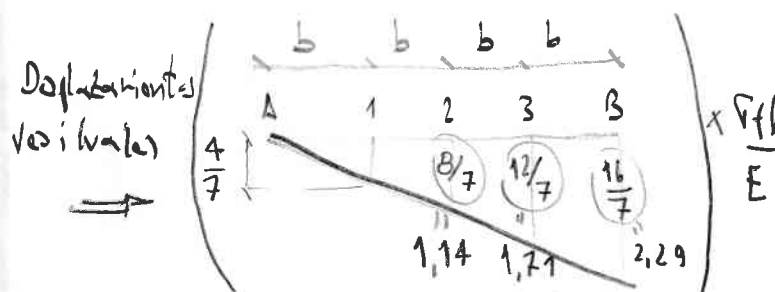
$-\frac{3}{5}(A) + (B) = 0 \rightarrow \left(5 - \frac{18}{5}\right)F_3 = \left(\frac{3}{5} - 1\right)\nabla f l \cdot A \rightarrow \frac{7}{5}F_3 = -\frac{2}{5}\nabla f l \cdot A \Rightarrow F_3 = -\frac{2}{7}\nabla f l \cdot A$
 (compression)

(A) $\Rightarrow 5F_2 = \left(\frac{12}{7} - 1\right)\nabla f l \cdot A \Rightarrow F_2 = +\frac{\nabla f l \cdot A}{7}$
 tracción $\rightarrow$ Ec. eq. $\Rightarrow F_1 = -\frac{2}{7}\nabla f l \cdot A + \frac{6}{7}\nabla f l \cdot A$

$F_1 = +\frac{4}{7}\nabla f l \cdot A$
 tracción $\Rightarrow$ Fuerzas residuales $\Rightarrow$ $\left(\begin{matrix} \uparrow 4/7 & \uparrow 1/7 & \downarrow 2/7 \\ \text{No} & & \end{matrix} \right) \times \nabla f l \cdot A$

La barra 1 siempre está en zona elástica $\Rightarrow \frac{\delta_{1 \text{ final}}}{L} \cdot E = \frac{4}{7}\nabla f l \Rightarrow \delta_{1F} = +\frac{4}{7} \frac{\nabla f l \cdot L}{E}$

$\frac{\delta_{BF}}{4} = \frac{\delta_{1F}}{1} \Rightarrow \delta_{BF} = \frac{16}{7} \frac{\nabla f l \cdot L}{E}$
 2,29



8/8