



Examen de Mecánica Estructural – 24 de Julio de 2023

Comentarios previos:

- El estudiante cuenta con tres horas y media para la realización de este examen.
- Procure, en la medida de lo posible, realizar los diferentes ejercicios en hojas separadas.



Teórico 1

- Enunciar las hipótesis de la teoría de torsión de Vlasov
- Probar que la proyección $\mathbf{t}$ del desplazamiento sobre la tangente a la línea media de la sección en un punto de ésta verifica la relación: $d\mathbf{t} = \mathbf{p} \cdot d\mathbf{\varphi}$ donde $\mathbf{p}$ es el ángulo de giro y $\mathbf{p}$ la distancia del centro de corte a la tangente.
- Calcular el alabeo de un punto genérico de la línea media de la sección en función del alabeo del origen de coordenadas curvilíneas y de las coordenadas sectoriales correspondientes.
- Determinar la expresión de las tensiones normales en términos de las coordenadas sectoriales normalizadas.

Teórico 2

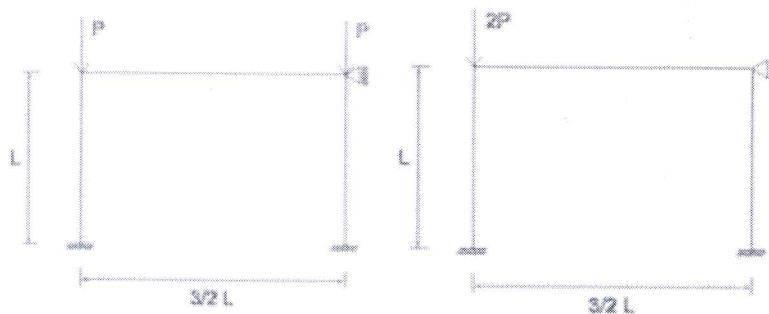
- Enunciar todas las hipótesis de trabajo y demostrar la siguiente fórmula correspondiente al pandeo de los pórticos de nudos indesplazables:

$$\Psi_A \Psi_B (C^2 - S^2) + 2(\Psi_A + \Psi_B)C + 4 = 0$$

- Justificar el valor que toma el coeficiente Ψ_A , cuando en el nudo A se tiene:

i) un empotramiento, ii) un apoyo simple.

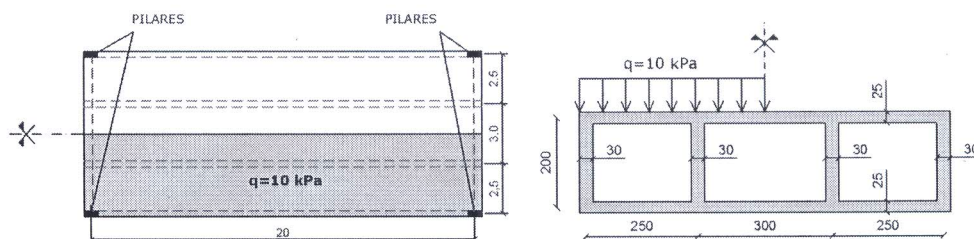
Determinar la carga crítica de pandeo de los pórticos de la figura utilizando la expresión de las fórmulas aproximadas.





Práctico 1:

Los tableros de los puentes consisten en la parte estructural por la que circulan los vehículos o personas. El tablero del puente ($E=30 \text{ GPa}$, $\nu=0.2$) cuya planta se indica en la *Figura Izquierda* (unidades en metros y a eje), se compone de una viga cajón como la indicada en la *Figura Derecha* (unidades en centímetros y a eje). La misma se apoya en cuatro pilares. Para su dimensionamiento se estudian ciertas hipótesis de carga, siendo una de ellas la situación donde solo la mitad del tablero está cargado con una carga $q=10 \text{ kN/m}^2$.



Se pide:

- Indicar el esquema estructural de la viga cajón.

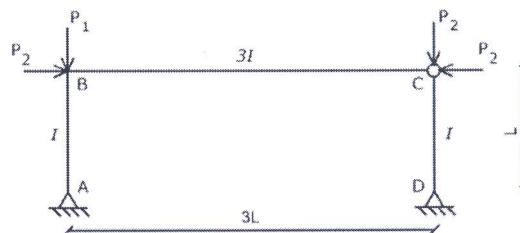
Para la hipótesis de carga estudiada:

- Obtener los diagramas de solicitaciones de la viga cajón y las reacciones en los apoyos. Incluida la fuerza de directa en los pilares.
- Obtener las máximas tensiones normales.
- Determinar las máximas tensiones rasantes por torsión e indicar dónde se dan.
- Determinar las máximas tensiones rasantes por corte.

Práctico 2:

Determinar la carga crítica de pandeo P_1 para la estructura de la figura, tanto por las ecuaciones de deflexiones angulares como por fórmulas aproximadas, con $E = \text{cte}$ si:

- $P_2 = 0$
- $P_2 = P_1$



Para las fórmulas aproximadas se pide el resultado de la carga crítica, mientras que para las ecuaciones de deflexiones angulares se pide obtener la ecuación a resolver e indicar como se seguiría a partir de ahí.



HOJA DE FÓRMULAS



Tensiones en barras de eje recto por flexión, cortante y directa

Tensiones normales:

$$\sigma_x = \frac{N}{A} + \frac{M_z I_y - M_y I_{yz}}{I_y I_z - I_{yz}^2} y + \frac{M_y I_z - M_z I_{yz}}{I_y I_z - I_{yz}^2} z$$

Tensiones rasantes:

$$q = - \left(\frac{\mu_z I_y - \mu_y I_{yz}}{I_y I_z - I_{yz}^2} V_y + \frac{\mu_y I_z - \mu_z I_{yz}}{I_y I_z - I_{yz}^2} V_z \right)$$

En secciones cerradas:

$$q_0 = - \frac{\oint \tau_a \frac{ds}{G}}{\oint \frac{ds}{eG}}$$

Torsión de Saint Venant

$$M_t = GJ \frac{d\phi_x}{dx} = G\theta J$$

En secciones abiertas de pared delgada:

$$\tau_{SV \max} = G\theta e$$

$$J = \sum \frac{1}{3} b_i e_i^3$$

En secciones cerradas de pared delgada:

$$M_t = 2qA$$

$$J = \frac{4A^2}{\oint \frac{1}{e} ds}$$

En secciones multicelulares:

$$q_i \oint_{\partial \Omega_i} \frac{1}{e_i} ds - \sum_j q_j \int_{(ij)} \frac{1}{e_{ij}} ds = 2G\theta A_i$$

$$M_t = 2 \sum_{i=1}^n q_i A_i$$



(ij) es la parte de la pared de la celda i que es común con la celda j. $\partial \Omega_i$ es el borde de la celda i.

Torsión mixta

$$T = M_{SV} + M_V = GJ \frac{d\varphi_x}{dx} - EI_\Omega \frac{d^3 \varphi_x}{dx^3}$$

$$-m_t = GJ \frac{d^2 \varphi_x}{dx^2} - EI_\Omega \frac{d^4 \varphi_x}{dx^4}$$

$$\varphi_x = C_1 + C_2 e^{\chi x/L} + C_3 e^{-\chi x/L} + C_4 x + \varphi_p = C_1^* + C_2^* ch\left(\chi \frac{x}{L}\right) + C_3^* sh\left(\chi \frac{x}{L}\right) + C_4^* x + \varphi_p ; \chi = L \sqrt{\frac{GJ}{EI_\Omega}}$$

$$\omega = \int_0^s p_C ds ; \Omega = \omega - \frac{\int_A \omega dA}{A} ; I_\Omega = \int_A \Omega^2 dA ; \mu_\Omega(s_0) = \int_{s_1}^{s_0} \Omega e ds$$

$$\sigma_x = \frac{B_\Omega}{I_\Omega} \Omega ; B_\Omega = -EI_\Omega \frac{d^2 \varphi_x}{dx^2} ; B_\Omega = \sum P_i \Omega(s_i) ; \tau_{xs} = -\frac{M_V}{I_\Omega e} \mu_\Omega ; \tau_{SV \max} = G \frac{d\varphi_x}{dx} e$$

Pandeo con Slope-Deflection

Ecuaciones de Slope-Deflection

$$M_A = \frac{EI}{L} (c\theta_A + s\theta_B) - \frac{EI}{L} (c+s) \frac{\Delta}{L} ; M_B = \frac{EI}{L} (4\theta_A + 2\theta_B) - 6 \frac{EI}{L} \frac{\Delta}{L}$$

$$M_B = \frac{EI}{L} (s\theta_A + c\theta_B) - \frac{EI}{L} (c+s) \frac{\Delta}{L} ; M_B = \frac{EI}{L} (2\theta_A + 4\theta_B) - 6 \frac{EI}{L} \frac{\Delta}{L}$$

$$V_{AB} = -\frac{EI}{L^2} (\theta_A + \theta_B) \cdot (C+S) + \frac{EI}{L^2} (2C+2S-\varepsilon^2) \frac{\Delta}{L}$$

$$\varepsilon = L \sqrt{\frac{P}{EI}}$$

Pandeo vía fórmulas aproximadas:

$$\text{Carga crítica: } P_{crit} = \pi^2 \frac{EI_z}{L_{ef}^2} = \pi^2 \frac{EI_z}{(\beta L)^2}$$

$$\text{Pórtico indesplazable } \beta = \frac{0,64+1,4 \cdot (\psi_A + \psi_B) + 3 \cdot \psi_A \cdot \psi_B}{1,28+2 \cdot (\psi_A + \psi_B) + 3 \cdot \psi_A \cdot \psi_B}$$

$$\text{Pórtico desplazable } \beta = \sqrt{\frac{7,5+4 \cdot (\psi_A + \psi_B) + 1,6 \cdot \psi_A \cdot \psi_B}{7,5+\psi_A + \psi_B}}$$



Solución Examen de Mecánica Estructural – Julio de 2023

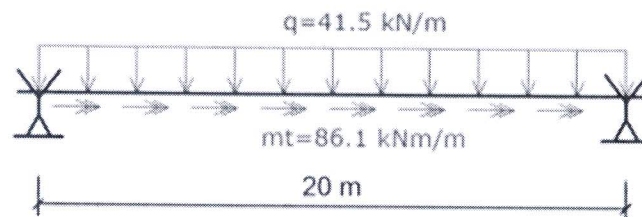
Teóricos:

Ver material teórico del curso

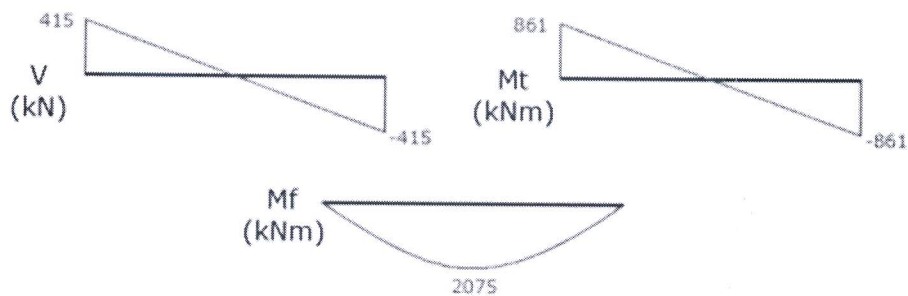
Práctico 1:



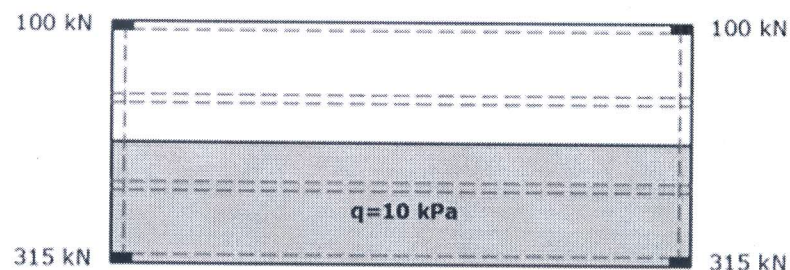
- a) Se puede plantear dicha estructura como una barra cuyos apoyos son tipo horquillas. Dichas horquillas representan los dos pilares en cada extremo. Por la acción de la carga excéntrica, se tiene una carga uniformemente distribuida $q=41.5 \text{ kN/m}$ y un momento torsor uniformemente distribuido $mt=86.1 \text{ kNm/m}$.



b)

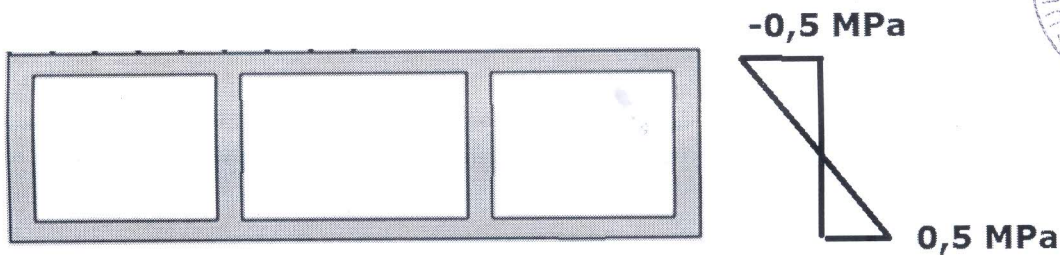


Las reacciones en los pilares son:



- c) Como es una sección cerrada se desprecia la torsión de Vlasov, al no haber directa la única sollicitación que genera tensiones normales es la flexión de valor $M = 2075 \text{ kNm}$ en el medio.

Con una inercia de $I_z = 4,7 \text{ m}^4$ se obtiene:



- d) La máxima tensión por torsión se da en los apoyos con un momento de 861 kNm.

Se resuelve por el teorema de Bredtl, q_1 es el flujo en la celda central, q_2 en la izquierda, q_3 en la derecha.

Recorriendo la celda central:

$$112/3 q_1 - 20/3 q_2 - 20/3 q_3 = 12G\theta$$

Recorriendo la celda izquierda

$$-20/3 q_1 + 100/3 q_2 = 10G\theta$$

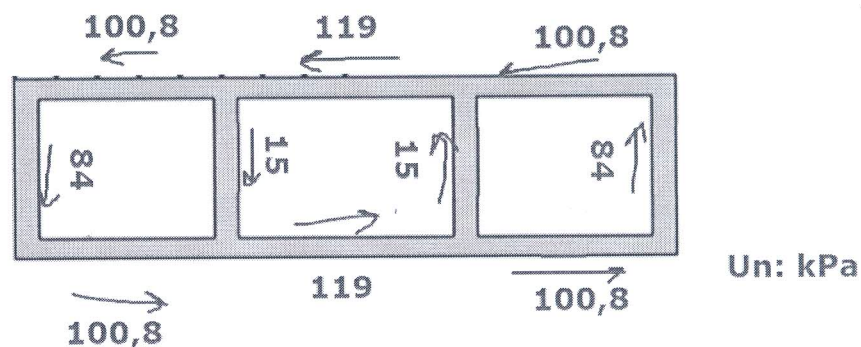
Recorriendo la derecha:

$$100/3 q_3 - 20/3 q_2 = 10G\theta$$

Resolviendo: $q_1 = 6/13 G\theta$ y $q_2 = q_3 = 51/130 G\theta$.

Con el valor del momento $G\theta = 3731/58 \text{ kN/m}^3$.

El diagrama de tensiones rasantes queda:

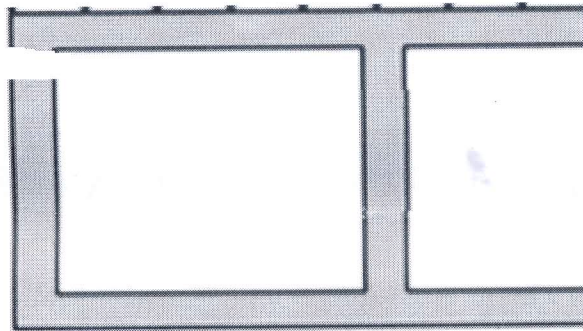




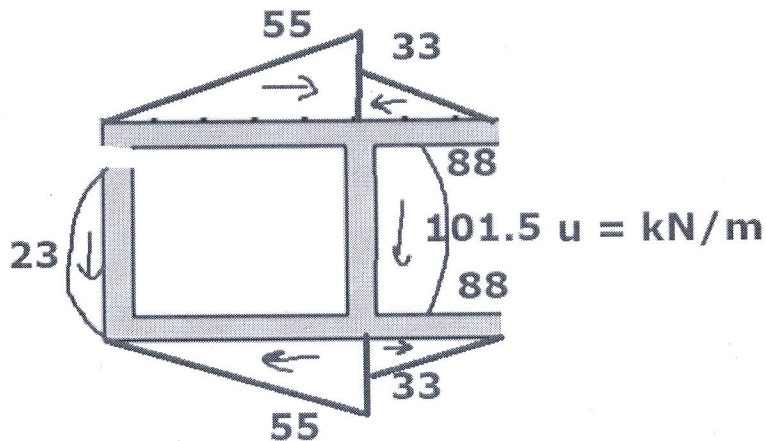
Mecánica Estructural

- e) Se resuelve en media sección con la mitad de inercia y mitad de cortante. El cortante máximo se da en el apoyo y vale $V = 415 \text{ kN}$

De todas formas es cerrada por lo que se realiza un corte:

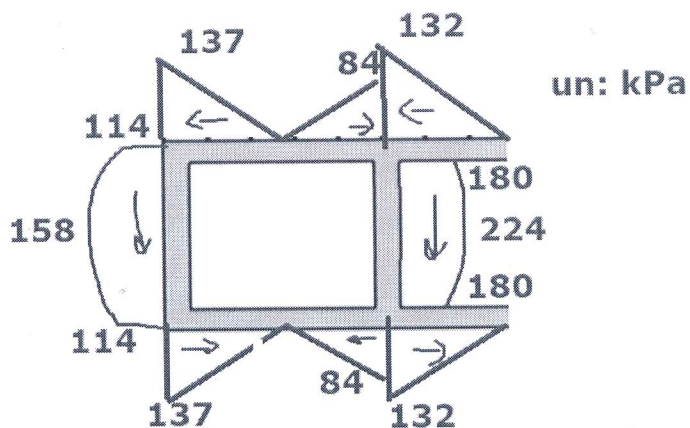


Mediante Jourawsky generalizado se obtiene el flujo de corte en la sección abierta:



Por lo tanto el flujo en la sección cerrada es $q_0 = -34,25 \text{ kN/m}$ en sentido horario.

Las tensiones rasantes quedan:





Práctico 2:

a) $P_2 = 0$

i. Fórmulas aproximadas.

Solo interesa la columna izquierda.

$\Psi_B = 1$ $\Psi_A = \text{infinito}$.

Usando la fórmula para pórticos DESPLAZABLES:

$\beta = 2,37$.

$P_{crit} = 1,76 EI/L^2$

ii. Slope Deflection

Incógnitas son giro en A, B, C1, C2, D y el desplazamiento del piso.

Yendo barra por barra aplicando la ecuación de la hoja de fórmulas y armando el sistema y anulando uno de los giros en C la matriz queda:

$$\begin{pmatrix} C & S & 0 & 0 & -(C+S) \\ S & 4+C & 2 & 0 & -(C+S) \\ 0 & 2 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 4 & -6 \\ S & C & 0 & 0 & -F \end{pmatrix}$$

Como las ecuaciones son no lineales no se pueden resolver con calculadora no programable durante el examen, solo se podría iterar y no es la idea. Los siguientes pasos sería anular este determinante y buscar para que valor de epsilon se anula.

b) $P_2 = P_1$

i. Fórmulas aproximadas:

La carga crítica del primer pilar quedó dada en la parte anterior.

El segundo pilar:

$\Psi_B = \text{infinito}$ $\Psi_A = \text{infinito}$.

Usando la fórmula para pórticos DESPLAZABLES:

$\beta = \text{infinito}$. Ya este coeficiente da una carga crítica nula así que no es necesario revisar la viga.

$P_{crit} = 0 EI/L^2$

Es importante notar que este valor no es razonable físicamente, muestra que las hipótesis de las fórmulas aproximadas son poco acertadas en este caso.





ii. Slope Deflection:

Se nota que la viga también se encuentra comprimida por lo que se requiere un análisis de segundo orden en ella también.

La relación de épsilon es $\epsilon_2 = 1,73\epsilon_1$ donde 2 es el de la viga y 1 el de los pilares.

Siguiendo un procedimiento análogo la matriz queda:

$$\begin{pmatrix} C_1 & S_1 & 0 & 0 & -(C_1 + S_1) \\ S_1 & C_1 + C_2 & S_2 & 0 & -(C_1 + S_1) \\ 0 & S_2 & C_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & S_1 & C_1 & -(C_1 + S_1) \\ S_1 & C_1 & 0 & 0 & -F_1 \end{pmatrix}$$



La cual se termina de resolver análogo a como se presentó en la parte anterior.