



Examen de Mecánica Estructural – 16 de Febrero de 2024

Comentarios previos:

- El estudiante cuenta con tres horas y media para la realización de este examen.
- Procure, en la medida de lo posible, realizar los diferentes ejercicios en hojas separadas.

Teórico 1:

- Enunciar las hipótesis de la teoría de torsión de Vlasov
- Probar que la proyección t del desplazamiento sobre la tangente a la línea media de la sección en un punto de ésta verifica la relación: $dt = p \cdot d\phi$ donde ϕ es el ángulo de giro y p la distancia del centro de corte a la tangente.
- Calcular el alabeo de un punto genérico de la línea media de la sección en función del alabeo del origen de coordenadas curvilíneas y de las coordenadas sectoriales correspondientes.
- Determinar la expresión de las tensiones normales en términos de las coordenadas sectoriales normalizadas.

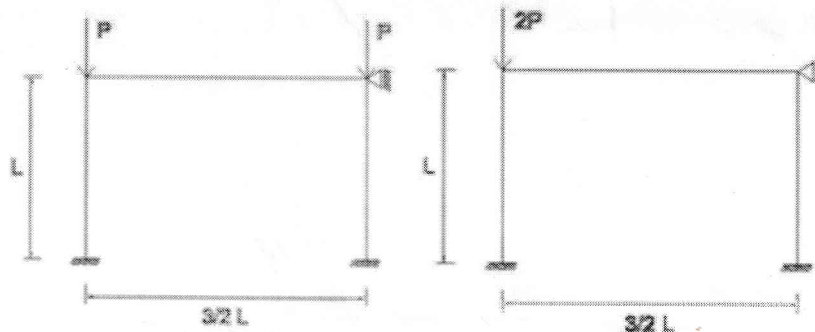
Teórico 2:

- Enunciar todas las hipótesis de trabajo y demostrar la siguiente fórmula correspondiente al pandeo de los pórticos de nudos indesplazables:

$$\psi_A \psi_B (C^2 - S^2) + 2(\psi_A + \psi_B)C + 4 = 0$$

- Justificar el valor que toma el coeficiente ψ_A , cuando en el nudo A se tiene:
i) un empotramiento, ii) un apoyo simple.

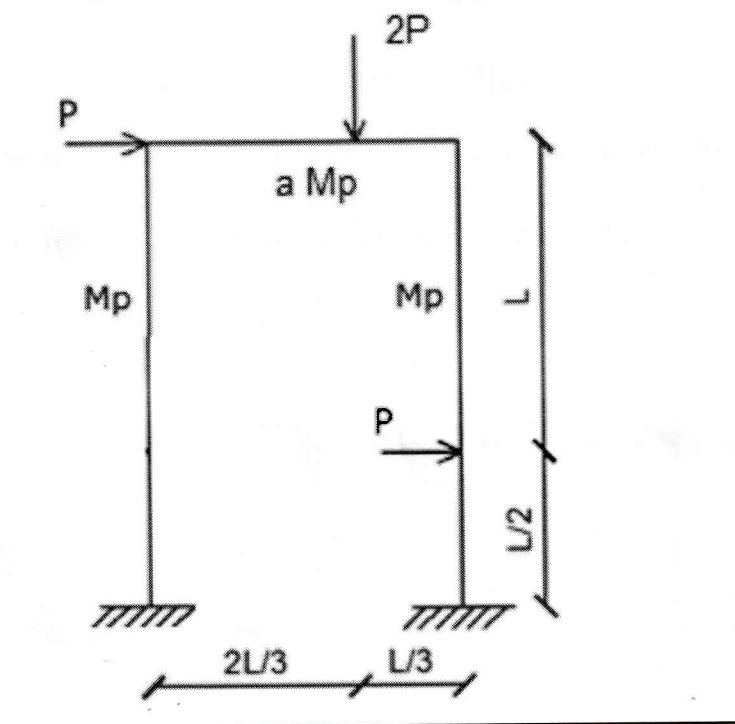
Determinar la carga crítica de pandeo de los pórticos de la figura utilizando la expresión de las fórmulas aproximadas.



Mecánica Estructural

Práctico 1:

- a) Si en el pórtico de la figura las secciones del dintel y los pilares, están construidas con el mismo material elastoplástico perfecto de tensión de fluencia σ_{fl} , y son rectangulares con el mismo ancho, pero la altura de la sección en el dintel es igual a raíz de dos por la altura de la sección en los pilares, determinar la relación a entre sus momentos de plastificación.
- b) Determinar la carga (P_{col}) de colapso del pórtico de la figura, utilizando los teoremas de análisis límite y explicando cuando se utiliza cada teorema y por qué motivo. Los pilares y el dintel están en las condiciones de la primera parte, siendo M_p el momento de plastificación de los pilares.
- c) Dibujar el diagrama de Momentos Flectores para la carga de colapso, e indicar como es el signo del momento flector en relación al del giro en las secciones críticas que no plastificaron, y en las que plastificaron; justificar el resultado.



Práctico 2:

Se considera la ménsula de la **Figura 3** conformada por el perfil **C** de acero ($E=210$ GPa, $G=80$ GPa) de la **Figura 4**. La carga q se aplica en el alma del perfil **C**.

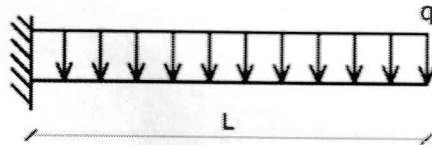


Figura 3

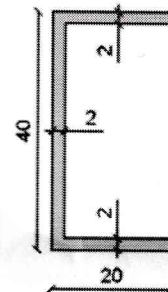


Figura 4

- Definir la posición del centro de corte de la sección.
- Obtener los **diagramas de solicitaciones**.
- Indicar la expresión del momento torsor total y las **condiciones de borde** del problema de torsión. Usarlas para obtener el giro por torsión.

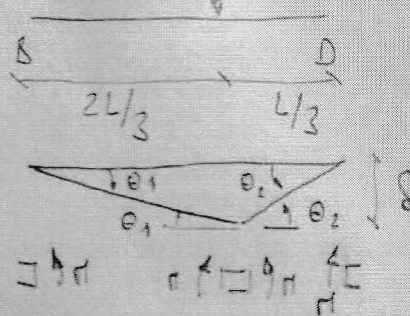
Datos: $L=2.0$ m; $q=20$ kN/m; $A=152$ cm²; $I_x=36581$ cm⁴; $J=202.67$ cm⁴; $I_p=1444400$ cm⁶.

Ex 1) c) Solución Primer parcial Mecánica Estructural 2019
 Mec. 1 viga:



$$W_{ext} = 2\lambda P \frac{2}{3} L \theta_1$$

$$\frac{W_{ext}}{\lambda P L} = \frac{4}{3} \theta_1$$



$$\delta = \frac{2L}{3} \theta_1 \rightarrow \theta_1 \frac{2L}{3} = \theta_2 \frac{L}{3}$$

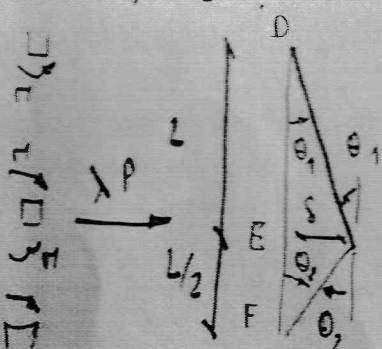
$$\delta = \theta_2 \frac{L}{3}$$

$$\theta_2 = 2\theta_1$$

$$W_{int} = -\pi_B \theta_1 + 3\pi_C \theta_1 - 2\pi_D \theta_1$$

$$\frac{W_{int}}{\pi_P} = 9 \theta_1$$

Mec. 2 Pilar DEF:



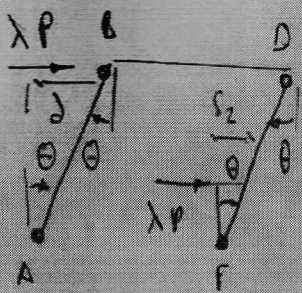
$$\delta = L \theta_1 \rightarrow \theta_2 = 2\theta_1; W_{ext} = \lambda P \theta_1 L$$

$$\delta = \frac{L}{2} \theta_2$$

$$\frac{W_{ext}}{\lambda P L} = \theta_1$$

$$W_{int} = \pi_D \theta_1 - 3\pi_E \theta_1 + \pi_F \theta_1 \rightarrow \frac{W_{int}}{\pi_P} = 6 \theta_1$$

Mec. 3 Pórtico:



$$\delta_1 = \frac{3L}{2} \theta; W_{ext} = 2\lambda P L \theta \rightarrow \frac{W_{ext}}{\lambda P L} = 2\theta$$

$$\delta_2 = \theta \frac{L}{2}$$

$$W_{int} = -\pi_A \theta + \pi_B \theta - \pi_D \theta + \pi_F \theta$$

$$\frac{W_{int}}{\pi_P} = 4 \theta$$

	π_P	π_P	$2\pi_P$	π_P	π_P	π_P	$\frac{W_{ext}}{\lambda P L}$	$\frac{W_{int}}{\pi_P}$	$\frac{\lambda P L}{\pi_P}$
Mec.	A	B	C	D	E	F			
1		-1	+3	-2			4/3	9	27/4 = 6.75
2				+1	-3	+2	1	6	6
3	-1	+1		-1		+1	2	4	2
= 1+3	-1	0	+3	-3	0	+1	10/3	11	3.3
= 2+3	-1	+1	0	0	-3	+3	3	8	2.7

419

Tengo que verificar si $|n_c| < 2n_p$ y $|n_E| < n_p$

- Utilizo P.T.V. Rec. 1 para hallar n_c : imponiendo $\lambda = \frac{2n_p}{PL}$

$$-n_D \theta_1 + 3n_c \theta_1 - 2\theta_1 n_D = \frac{4}{3} \theta_1 \frac{2n_p}{PL} PL$$

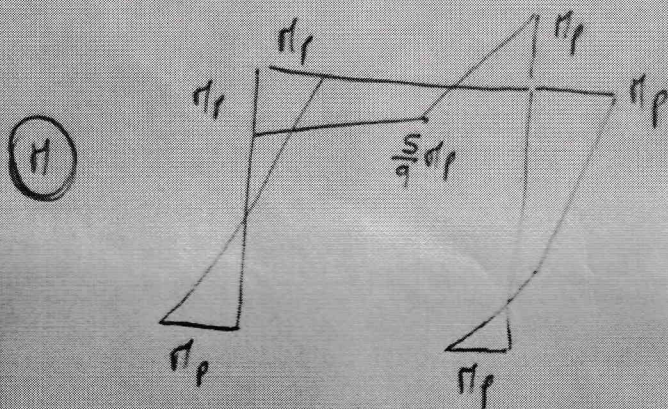
$$-n_p + 3n_c + 2n_p = \frac{8}{3} n_p \Rightarrow n_c = \left(\frac{8}{3} - 1\right) \frac{n_p}{3} \Rightarrow n_c = \frac{5}{9} n_p$$

Verifico $|n_c| < 2n_p$

- Igual pero con Rec. 2 para hallar n_E : imponiendo $\lambda = \frac{2n_p}{PL}$

$$n_D \theta_1 - 3n_E \theta_1 + 2n_p \theta_1 = \theta_1 \frac{2n_p}{PL} PL$$

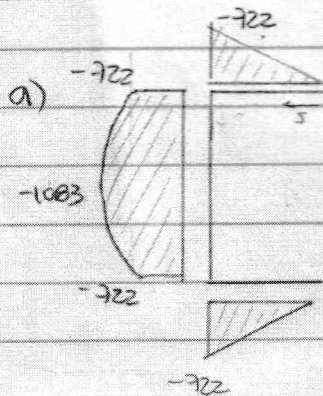
$$-n_p - 3n_E + 2n_p = 2n_p \Rightarrow n_E = -\frac{n_p}{3}, \text{ verifico } |n_E| < n_p$$



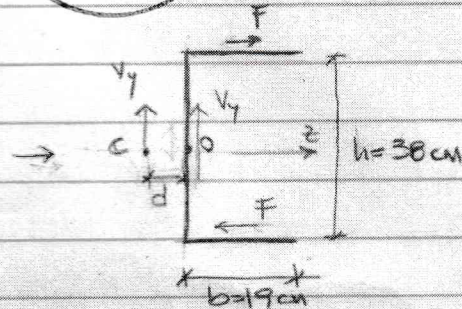
$$\Rightarrow \lambda = \frac{2n_p}{PL} \quad \text{o el factor de carga}$$



EJERCICIO 2



(M2)



→ El centro de corte pertenece al eje z por ser eje de simetría

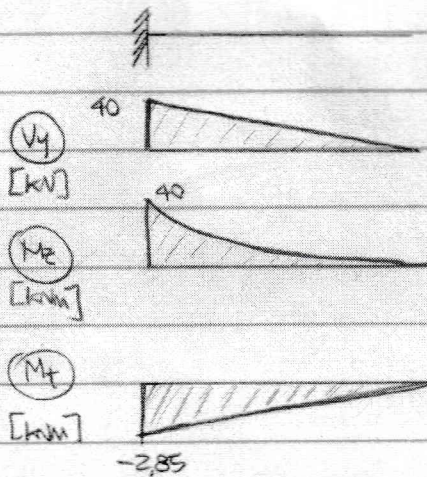
M0) $V_y \cdot d = F \cdot h$ para que sea estáticamente equivalente

$$d = \frac{F \cdot h}{V_y}$$

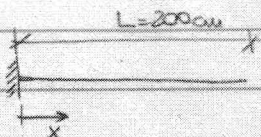
$$F = \frac{V_y \cdot \int_{-19}^{19} \mu_z dA}{I_z \cdot t} = \frac{V_y \cdot \int_{-19}^{19} \mu_z t ds}{I_z \cdot t} = \frac{V_y \cdot 722 \cdot 19/2}{36581} = 0.1875 V_y$$

$$\Rightarrow d = \frac{0.1875 V_y \cdot 38}{V_y} = 7.125 \text{ cm}$$

b)



c) $M_t = -285 + 1.425x$ (en kNm)



CONDICIONES DE CONTORNO

→ EMPOTRAMIENTO EN $x=0 \rightarrow \varphi(0)=0$ (gno)

→ $\varphi'(0)=0$ (alabes)

→ EXTREMOS LIBRE EN $x=2000 \rightarrow \varphi''(2000)=0$

ya que $Q_x=0$

$$Mt = -285 + 1,425x = GJ\varphi' - EI\varphi''$$

$$\beta = \sqrt{\frac{EI}{GJ}} = \sqrt{\frac{21062 \cdot 1444400 \text{ cm}^4}{8062 \cdot 202,7 \text{ cm}^4}} = 136,78 \text{ cm}$$

$$\chi = L/\beta = 200 \text{ cm} / 136,78 \text{ cm} = 1,46 \rightarrow \text{TORNO MIXTA}$$

$$\varphi = C_1 + C_2 e^{\chi/\beta} + C_3 e^{-\chi/\beta} + \varphi_p ; \varphi_p = \frac{1,425x^2}{2GJ} - \frac{285x}{GJ}$$

$$\Rightarrow \varphi = C_1 + C_2 e^{\chi/\beta} + C_3 e^{-\chi/\beta} + \frac{1,425x^2}{2GJ} - \frac{285x}{GJ}$$

$$\varphi(0) = C_1 + C_2 + C_3 = 0$$

$$C_1 = 0,0288$$

$$\varphi'(0) = \frac{C_2}{\beta} - \frac{C_3}{\beta} - \frac{285}{GJ} = 0$$

$$\Rightarrow C_2 = -2,391 \times 10^{-3}$$

$$C_3 = -0,0264$$

$$\varphi''(200) = \frac{C_2}{\beta^2} e^{200/136,78} + \frac{C_3}{\beta^2} e^{-200/136,78} + \frac{1,425}{GJ} = 0$$

$$\Rightarrow \varphi = 0,0288 - 2,391 \times 10^{-3} e^{\chi/136,78} - 0,0264 e^{-\chi/136,78} + 4,394 \times 10^{-9} x^2 - 1,758 \times 10^{-4} x$$



HOJA DE FÓRMULAS

Tensiones en barras de eje recto por flexión, cortante y directa

Tensiones normales:

$$\sigma_x = \frac{N}{A} + \frac{M_z I_y - M_y I_{yz}}{I_y I_z - I_{yz}^2} y + \frac{M_y I_z - M_z I_{yz}}{I_y I_z - I_{yz}^2} z$$

Tensiones rasantes:

$$q = - \left(\frac{\mu_z I_y - \mu_y I_{yz}}{I_y I_z - I_{yz}^2} V_y + \frac{\mu_y I_z - \mu_z I_{yz}}{I_y I_z - I_{yz}^2} V_z \right)$$

En secciones cerradas:

$$q_0 = - \frac{\oint \tau_a \frac{ds}{G}}{\oint \frac{ds}{eG}}$$

Torsión de Saint Venant

$$M_t = GJ \frac{d\phi_x}{dx} = G\theta J$$

En secciones abiertas de pared delgada:

$$\tau_{SV \max} = G\theta e$$

$$J = \sum \frac{1}{3} b_i e_i^3$$

En secciones cerradas de pared delgada:

$$M_t = 2qA$$

$$J = \frac{4A^2}{\oint \frac{1}{e} ds}$$



8/9.

En secciones multicelulares:

$$q_i \oint_{\partial \Omega_i} \frac{1}{e_i} ds - \sum_j q_j \int_{(ij)} \frac{1}{e_{ij}} ds = 2G\theta A_i$$

$$M_t = 2 \sum_{i=1}^n q_i A_i$$



(ij) es la parte de la pared de la celda i que es común con la celda j. $\partial \Omega_i$ es el borde de la celda i.

Torsión mixta

$$T = M_{SV} + M_V = GJ \frac{d\varphi_x}{dx} - EI_\Omega \frac{d^3 \varphi_x}{dx^3}$$

$$-m_t = GJ \frac{d^2 \varphi_x}{dx^2} - EI_\Omega \frac{d^4 \varphi_x}{dx^4}$$

$$\varphi_x = C_1 + C_2 e^{\chi x/L} + C_3 e^{-\chi x/L} + C_4 x + \varphi_p = C_1^* + C_2^* \operatorname{ch}\left(\chi \frac{x}{L}\right) + C_3^* \operatorname{sh}\left(\chi \frac{x}{L}\right) + C_4^* x + \varphi_p ; \chi = L \sqrt{\frac{GJ}{EI_\Omega}}$$

$$\omega = \int_0^s p_C ds ; \Omega = \omega - \frac{\int_A \omega dA}{A} ; I_\Omega = \int_A \Omega^2 dA ; \mu_\Omega(s_0) = \int_{s_1}^{s_0} \Omega e ds$$

$$\sigma_x = \frac{B_\Omega}{I_\Omega} \Omega ; B_\Omega = -EI_\Omega \frac{d^2 \varphi_x}{dx^2} ; B_\Omega = \sum P_i \Omega(s_i) ; \tau_{xs} = -\frac{M_V}{I_\Omega e} \mu_\Omega ; \tau_{SV \max} = G \frac{d\varphi_x}{dx} e$$

Plasticidad en Vigas:

$$\frac{\partial F}{\partial y} = 0$$

$$F(y) = \sum \int_0^{L_j} \frac{M_j^2(y)}{2EI} dx + \sum \theta_p M_j(y)$$

9/9.