

Examen de Mecánica Estructural – 10 de Febrero de 2025

Comentarios previos:

- El estudiante cuenta con cuatro horas para realizar de este examen.
- Procure, en la medida de lo posible, realizar los diferentes ejercicios en hojas separadas.

Teórico 1

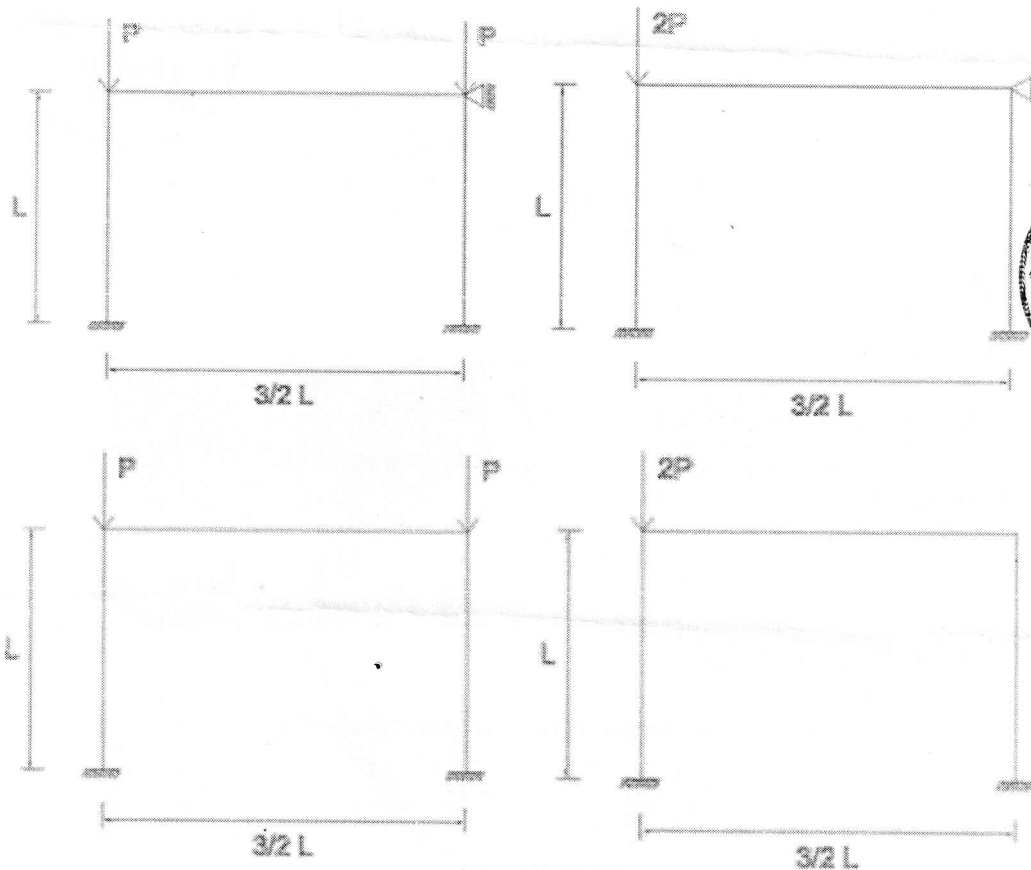
- Definir estructura de nudos desplazables e indesplazables.
- Enunciar todas las hipótesis para pórticos de nudos desplazables e indesplazables.
- Determinar la carga crítica (P_{crit}) de los pórticos de las figuras utilizando la expresión para hallar el factor de longitud de pandeo β para pórticos desplazables e indesplazables. Comparar y analizar resultados.

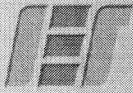
Pórticos indesplazables:

$$\beta = \frac{0,64 + 1,4 (\psi_A + \psi_B) + 3\psi_A \cdot \psi_B}{1,28 + 2 (\psi_A + \psi_B) + 3\psi_A \cdot \psi_B}$$

Pórticos desplazables:

$$\beta = \sqrt{\frac{7,5 + 4 (\psi_A + \psi_B) + 1,6\psi_A \cdot \psi_B}{7,5 + (\psi_A + \psi_B)}}$$





Mecánica Estructural

Teórico 2:

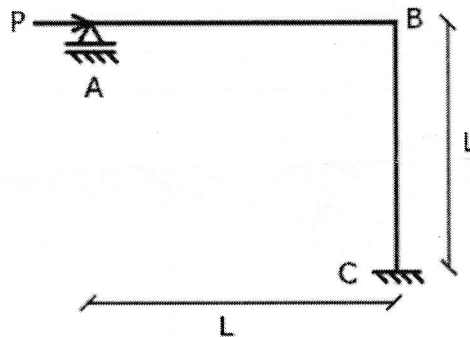
- Establecer las hipótesis de la teoría de torsión de Vlasov.
- Deducir la expresión de las tensiones normales: $\sigma_x = -E\Omega\varphi''$.

Práctico 1:

A partir del pórtico de la figura, donde todas las barras tienen la misma rigidez EI , longitud L y están construidas por un material elastoplástico perfecto con momento de plastificación M_p .

Determinar:

- La carga P_1 , para la cual se forma la primera rótula plástica, y el correspondiente desplazamiento horizontal d_1 del nudo A.
- La carga de colapso P_2 de la estructura y el desplazamiento d_2 que se obtendría un momento antes de alcanzarla.
- Si un instante antes de alcanzar P_2 se descarga la estructura, hallar las fuerzas, momentos residuales y el desplazamiento residual del nudo A.



Práctico 2:

La sección de un puente (ver Figura 1) está conformada por una viga tipo cajón de hormigón ($E=30 \text{ GPa}$, $\nu=0.2$) como la indicada en la Figura 2. La misma presenta un momento torsor $M_t=4500 \text{ kNm}$. Se pide determinar las tensiones rasantes y el barrenado en dicha sección. Las dimensiones están en centímetros y medidas a eje. Despreciar la colaboración de los volados de la sección.

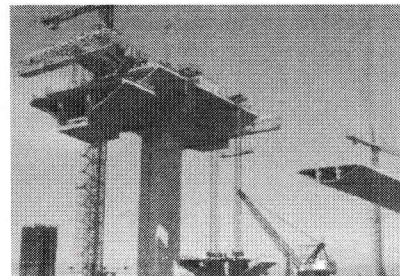


Figura 1

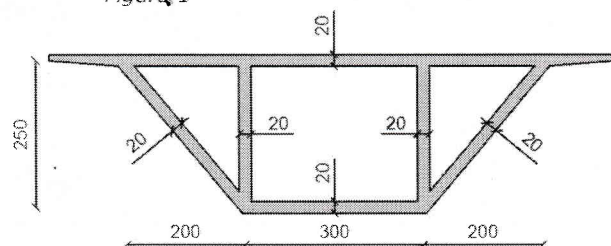
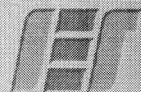


Figura 2



Hoja de fórmulas – Examen Mecánica Estructural Febrero 2025

Torsión de Saint Venant

$$M_t = GJ \frac{d\varphi_x}{dx} = G\theta J$$

En secciones abiertas de pared delgada:

$$\tau_{SV \max} = G\theta e$$

En secciones cerradas de pared delgada:

$$M_t = 2qA$$

$$J = \frac{4A^2}{\oint \frac{1}{e} ds}$$

En secciones multicelulares:

$$q_i \oint \frac{1}{e_i} ds - \sum_j q_j \int_{(ij)} \frac{1}{e_{ij}} ds = 2G\theta A_i$$

$$M_t = 2 \sum_{i=1}^n q_i A_i$$

(i) es la parte de la celda que no es común con otras celdas e (ij) es la parte de la pared de la celda i que es común con la celda j. $\partial \Omega_i$ es el borde de la célula i.



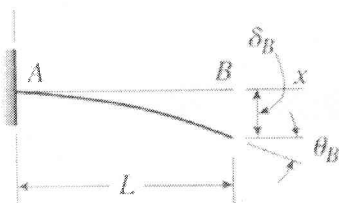
Plasticidad

Funcional de Colonnetti

$$F(Y) = \sum_{i=1}^n \int_0^{L_i} \frac{N^2(Y)}{2EA} dx + \sum_{i=1}^n \int_0^{L_i} (\varepsilon_0 + \varepsilon_p) N(Y) dx$$

$$F(Y) = \sum_{i=1}^n \int_0^{L_i} \frac{M^2(Y)}{2EA} dx + \sum_{i=1}^n \int_0^{L_i} (K_0 + K_p) M(Y) dx$$

TABLA DE DEFLEXIONES EN MÉNSULAS



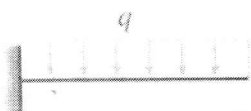
v = deflexión en la dirección y (positiva hacia arriba)

$v' = dv/dx$ = pendiente de la curva de deflexión

$\delta_B = -v(L)$ = deflexión en el extremo B de la viga (positiva hacia abajo)

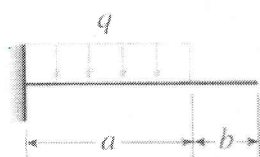
$\theta_B = -v'(L)$ = ángulo de rotación en el extremo B de la viga (positiva en sentido horario)

EI = constante



$$v = -\frac{qx^2}{24EI}(6L^2 - 4Lx + x^2) \quad v' = -\frac{qx}{6EI}(3L^2 - 3Lx + x^2)$$

$$\delta_B = \frac{qL^4}{8EI} \quad \theta_B = \frac{qL^3}{6EI}$$



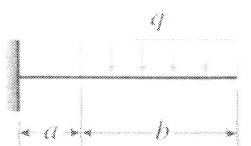
$$v = -\frac{qx^2}{24EI}(6a^2 - 4ax + x^2) \quad (0 \leq x \leq a)$$

$$v' = -\frac{qx}{6EI}(3a^2 - 3ax + x^2) \quad (0 \leq x \leq a)$$

$$v = -\frac{qa^3}{24EI}(4x - a) \quad v' = -\frac{qa^3}{6EI} \quad (a \leq x \leq L)$$

$$\text{Con } x = a: \quad v = -\frac{qa^4}{8EI} \quad v' = -\frac{qa^3}{6EI}$$

$$\delta_B = \frac{qa^3}{24EI}(4L - a) \quad \theta_B = \frac{qa^3}{6EI}$$



$$v = -\frac{qbx^2}{12EI}(3L + 3a - 2x) \quad (0 \leq x \leq a)$$

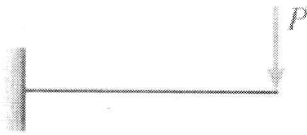
$$v' = -\frac{qbx}{2EI}(L + a - x) \quad (0 \leq x \leq a)$$

$$v = -\frac{q}{24EI}(x^4 - 4Lx^3 + 6L^2x^2 - 4a^3x + a^4) \quad (a \leq x \leq L)$$

$$v' = -\frac{q}{6EI}(x^3 - 3Lx^2 + 3L^2x - a^3) \quad (a \leq x \leq L)$$

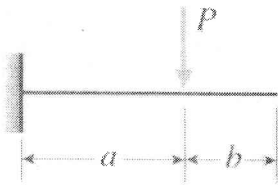
$$\text{Con } x = a: \quad v = -\frac{qa^2b}{12EI}(3L + a) \quad v' = -\frac{qabL}{2EI}$$

$$\delta_B = \frac{q}{24EI}(3L^4 - 4a^3L + a^4) \quad \theta_B = \frac{q}{6EI}(L^3 - a^3)$$



$$v = -\frac{Px^2}{6EI}(3L - x) \quad v' = -\frac{Px}{2EI}(2L - x)$$

$$\delta_B = \frac{PL^3}{3EI} \quad \theta_B = \frac{PL^2}{2EI}$$



$$v = -\frac{Px^2}{6EI}(3a - x) \quad v' = -\frac{Px}{2EI}(2a - x) \quad (0 \leq x \leq a)$$

$$v = -\frac{Pa^2}{6EI}(3x - a) \quad v' = -\frac{Pa^2}{2EI} \quad (a \leq x \leq L)$$

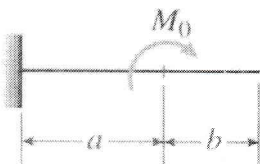
$$\text{Con } x = a: \quad v = -\frac{Pa^3}{3EI} \quad v' = -\frac{Pa^2}{2EI}$$

$$\delta_B = \frac{Pa^2}{6EI}(3L - a) \quad \theta_B = \frac{Pa^2}{2EI}$$



$$v = -\frac{M_0x^2}{2EI} \quad v' = -\frac{M_0x}{EI}$$

$$\delta_B = \frac{M_0L^2}{2EI} \quad \theta_B = \frac{M_0L}{EI}$$

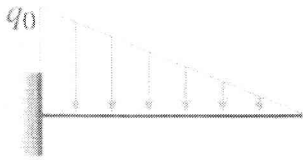


$$v = -\frac{M_0x^2}{2EI} \quad v' = -\frac{M_0x}{EI} \quad (0 \leq x \leq a)$$

$$v = -\frac{M_0a}{2EI}(2x - a) \quad v' = -\frac{M_0a}{EI} \quad (a \leq x \leq L)$$

$$\text{Con } x = a: \quad v = -\frac{M_0a^2}{2EI} \quad v' = -\frac{M_0a}{EI}$$

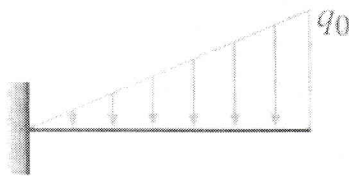
$$\delta_B = \frac{M_0a}{2EI}(2L - a) \quad \theta_B = \frac{M_0a}{EI}$$



$$v = -\frac{q_0 x^2}{120EI} (10L^3 - 10L^2x + 5Lx^2 - x^3)$$

$$v' = -\frac{q_0 x}{24EI} (4L^3 - 6L^2x + 4Lx^2 - x^3)$$

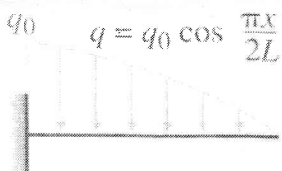
$$\delta_B = \frac{q_0 L^4}{30EI} \quad \theta_B = \frac{q_0 L^3}{24EI}$$



$$v = -\frac{q_0 x^2}{120EI} (20L^3 - 10L^2x + x^3)$$

$$v' = -\frac{q_0 x}{24EI} (8L^3 - 6L^2x + x^3)$$

$$\delta_B = \frac{11q_0 L^4}{120EI} \quad \theta_B = \frac{q_0 L^3}{8EI}$$



$$v = -\frac{q_0 L}{3\pi^4 EI} \left(48L^3 \cos \frac{\pi x}{2L} - 48L^3 + 3\pi^3 Lx^2 - \pi^3 x^3 \right)$$

$$v' = -\frac{q_0 L}{\pi^3 EI} \left(2\pi^2 Lx - \pi^2 x^2 - 8L^2 \sin \frac{\pi x}{2L} \right)$$

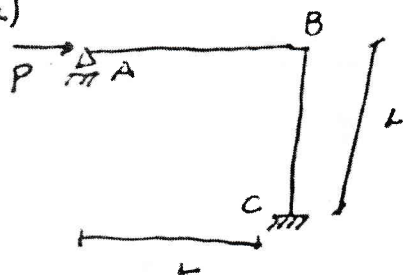
$$\delta_B = \frac{2q_0 L^4}{3\pi^4 EI} (\pi^3 - 24) \quad \theta_B = \frac{q_0 L^3}{\pi^3 EI} (\pi^2 - 8)$$



	$\frac{1}{l} \int M^2 dx$		$\frac{1}{l} \int M^2 dx$
	M^2		$\frac{1}{3} M^2$
	$\frac{1}{3} (M_g^2 + M_g M_d + M_d^2)$		$\frac{1}{3} M^2$
	$\frac{1}{3} (M_g^2 - M_g M_d + M_d^2)$		$\frac{1}{5} M_g^2$
	$\frac{1}{3} M_g^2$		$\frac{1}{5} M_d^2$
	$\frac{1}{3} M_g^2$		$\frac{8}{15} M^2$
	$\frac{1}{3} M_d^2$		$\frac{8}{15} M_g^2$

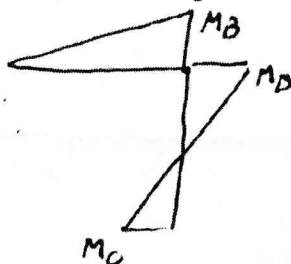
Exámen Febrero 2025 Mecánica Estructural - Práctico 1

a)



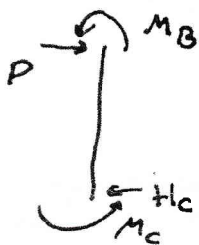
En primer lugar resolvamos la estructura elásticamente.

→ Supongamos un diagrama de momentos.



→ Funcional de Colanetti: → Para definirlo debemos definir la relación entre M_B y M_C .

Veamos la barra BC:



Equilibrio de momentos desde C:

$$M_B + M_C - PL = 0$$

$$\Rightarrow \underline{M_C = PL - M_B}$$



$$F(M_B) = \sum_{i=1}^2 \int_0^L \frac{M^2(M_B)}{2EI} dx + 0 \quad \text{En este momento no tenemos plastificación.}$$

$$= \int_{\text{Barra AB}} \frac{M_B^2}{2EI} dx + \int_{\text{Barra BC}} \frac{M^2}{2EI} dx = \frac{1}{3} \frac{M_B^2}{2EI} L + \frac{1}{3} \frac{(M_B^2 - M_B M_C + M_C^2) L}{2EI}$$

Tabla integrales de cuadrados de funciones

→ Por teorema de Colanetti $\frac{\partial F}{\partial M_B} = 0$ Notar $\frac{\partial M_C}{\partial M_B} = -1$

$$\frac{\partial F}{\partial M_B}(M_B) = \frac{2 M_B L}{3 \cdot 2EI} + \frac{1}{EI} (2 M_B - M_C + M_B - 2 M_C) = 0$$

$$\Rightarrow 2 M_B + 2 M_B - PL + M_B + M_B - 2 PL + 2 M_B = 0$$

$$\Rightarrow 8 M_B - 3 PL = 0 \Rightarrow \underline{M_B = \frac{3}{8} PL}$$

$$\Rightarrow M_C = PL - \frac{3}{8} PL = \underline{\underline{\frac{5}{8} PL}}$$

La primera en generarse es la rótula en C

con $P_1 = \frac{8}{5} \frac{MP}{L}$ 8/13

Para hallar el desplazamiento de analizamos la barra BC

(H): Barras rígidas a derecha.

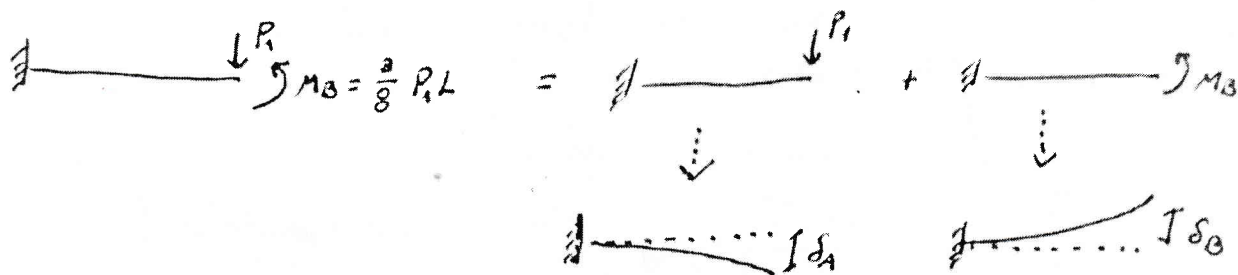


Tabla de deflexiones en ménsulas

$$\delta_A = \frac{P_1 L^3}{3EI} = \frac{8 MP/L L^3}{15 EI} = \frac{8 MPL^2}{15 EI}$$

$$\delta_1 = \delta_A + \delta_B = \delta_A - \delta_B$$

$$\delta_B = \frac{M_B L^2}{2EI} = \frac{3/8 P_1 L^2}{2EI} = \frac{3/8 \cdot 8/5 MP L^2}{2EI} = \frac{3}{10} \frac{MPL^2}{EI}$$

Tabla de deflexiones en ménsulas

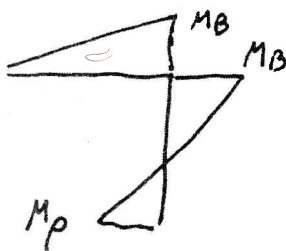
$$\delta_1 = \delta_A - \delta_B = \frac{MPL^2}{EI} \left(\frac{8}{15} - \frac{3}{10} \right) = \frac{MPL^2}{EI} \left(\frac{16-9}{30} \right)$$

$$\delta_1 = \frac{7}{30} \frac{MPL^2}{EI}$$

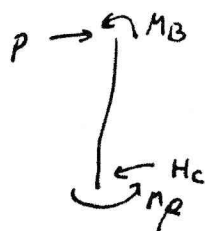
$$= \frac{MPL^2}{EI} \left(\frac{7}{30} \right)$$



b) Analicemos la estructura ahora:



y veamos barra BC:



Equilibrio de momentos desde C:

$$M_p = PL - M_B$$

$$\delta M_B = PL - M_p$$

Para plastificar $M_B = M_p$

$$\delta P_2 = \frac{2MP}{L}$$

Para hallar el desplazamiento final primero calculemos el giro plástico:

Funcional de Cohnetti:

$$F(M_B) = \frac{1}{3} \frac{M_B^2 L}{2EI} + \frac{1}{3} \frac{(M_B^2 - M_B M_c + M_c^2) L}{2EI} + M_c \theta_{p,c}$$

$$\frac{\partial F}{\partial M_B} = 0$$

$$\frac{2M_B L}{6EI} + \frac{L}{6EI} (2M_B - M_c + M_B - 2M_c) - \theta_{p,c} = 0$$

Sustituimos solución pre-colapso

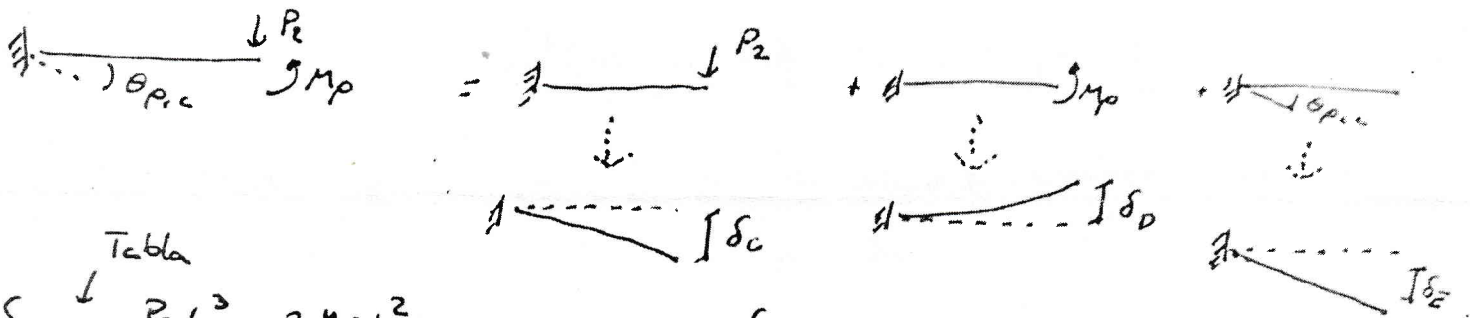
9/13

$$\frac{2M_p L}{6EI} + \frac{L}{6EI} (2M_p - M_p + M_p - 2M_p) - \theta_{p,c} = 0$$

$$\Rightarrow \theta_{p,c} = \frac{2M_p L}{6EI}$$



Nuevamente analicemos la barra BC



Tabla

$$\delta_c = \frac{P_2 L^3}{3EI} = \frac{2M_p L^2}{3EI}$$

$$\delta_2 = \delta_c - \delta_D + \delta_E$$

Tabla

$$\delta_D = \frac{M_p L^2}{2EI} = \frac{M_p L^2}{2EI}$$

$$\delta_E = \theta_{p,c} L = \frac{2M_p L^2}{6EI} = \frac{M_p L^2}{3EI}$$

Hipótesis de pequeños giros

$$\Rightarrow \delta_2 = \frac{2M_p L^2}{3EI} - \frac{M_p L^2}{2EI} + \frac{M_p L^2}{3EI} = \frac{M_p L^2}{2EI}$$

$$\Rightarrow \delta_2 = \frac{M_p L^2}{2EI}$$

c) Hipótesis a chequear al final

"Nada plastifica en la descarga."

Descarga elástica

Deformaciones

plásticas permanecen

$$\theta_{p,c} = \frac{M_p L}{3EI}$$

De la parte b

$$\frac{\partial F}{\partial M_B} = \frac{2M_0 L}{6EI} + \frac{L}{6EI} (2M_B - M_C + M_B - 2M_C) - \theta_{p,c} = 0$$

$$\Rightarrow M_C = PL - M_B = -M_B \quad \theta_{p,c} = \frac{M_p L}{3EI}$$

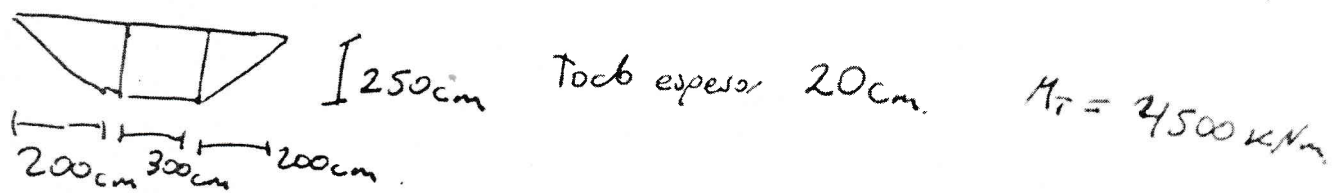
$$\frac{2M_0 L}{6EI} + \frac{L}{6EI} (2M_B + M_0 + M_0 + 2M_B) - \frac{2M_p L}{3EI} = 0$$

$$2M_B + 2M_0 + M_0 + M_0 + 2M_B - 2M_p = 0$$

$$8M_B = 2M_p \quad \Rightarrow M_B = \frac{M_p}{4} \quad \Rightarrow M_C = -\frac{M_p}{4}$$

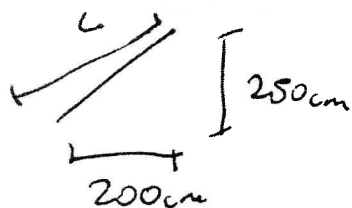
Examen Febrero 2025 - Mecánica Estructural - Práctico 2

Como se desprecia la colaboración de los voladros se considera la siguiente sección:



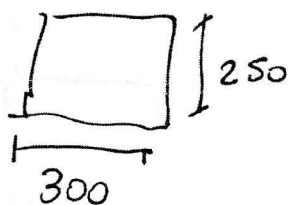
En primer lugar definamos J para hallar el baricentro.

Propiedades geométricas:



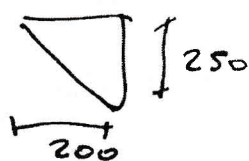
$$L = \sqrt{250^2 + 200^2} = 320,156 \text{ cm}$$

Área del rectángulo



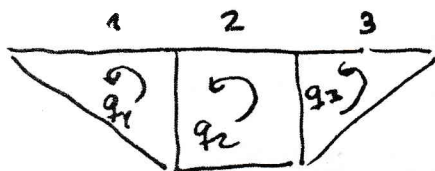
$$A_D = 75\,000 \text{ cm}^2$$

Área del triángulo



$$A_D = 25\,000 \text{ cm}^2$$

Ecuación de secciones multicelulares:



Ecuación triángulo 1: $q_1 \oint_{\partial R_1} \frac{1}{e_1} ds - q_2 \int_{L_{12}} \frac{1}{e_1} ds = 2G\theta A_D$

$$\Rightarrow q_1 \frac{1}{20 \text{ cm}} (200 \text{ cm} + 250 \text{ cm} + 320,156 \text{ cm}) - q_2 \frac{250 \text{ cm}}{20 \text{ cm}} = 2G\theta \cdot 25000 \text{ cm}^2$$

$$\Rightarrow \boxed{q_1 (38,508) - q_2 (12,5) = 50\,000 \text{ cm}^2 G\theta} \text{ Ec. 1.}$$

Ecuación triángulo 3:

Análoga: $\boxed{q_3 (38,508) - q_2 (12,5) = 50\,000 \text{ cm}^2 G\theta} \quad \text{Ec. 2.}$

Ecuación cuadrado:

$$q_2 \int_{\frac{1}{2}L_2}^{\frac{1}{2}L_2} \frac{1}{c_2} ds - q_1 \int_{\frac{1}{2}L_1}^{\frac{1}{2}L_1} \frac{1}{c_1} ds - q_3 \int_{\frac{1}{2}L_3}^{\frac{1}{2}L_3} \frac{1}{c_3} ds = 2 G \theta A_d$$



$$\frac{q_2}{20 \text{ cm}} (250 + 300 + 250 + 300) - \frac{q_1}{20 \text{ cm}} 250 \text{ cm} - \frac{q_3}{20 \text{ cm}} 250 \text{ cm} = 150\,000 \text{ cm}^2 G\theta$$

$$\boxed{q_2 (55) - q_1 (12,5) - q_3 (12,5) = 150\,000 \text{ cm}^2 G\theta}$$

Ec. 3.

Resolviendo sistema de Ec. 1-3

$$q_1 = q_3 = 2561,70 \frac{G\theta}{\text{cm}^2} \quad q_2 = 3891,68 \text{ cm}^2 G\theta$$

⇒ Ecuación del momento.

$$M_t = 2 \sum q_i A_i \quad G = \frac{E}{2(1+\nu)} = 12,5 \text{ GPa.}$$

$$4500 \text{ kNm} = 2 \left(2 \cdot 2561,70 \text{ cm}^2 \cdot G\theta \cdot 25\,000 \text{ cm}^2 + 3891,68 \text{ cm}^2 G\theta \cdot A_d \right)$$

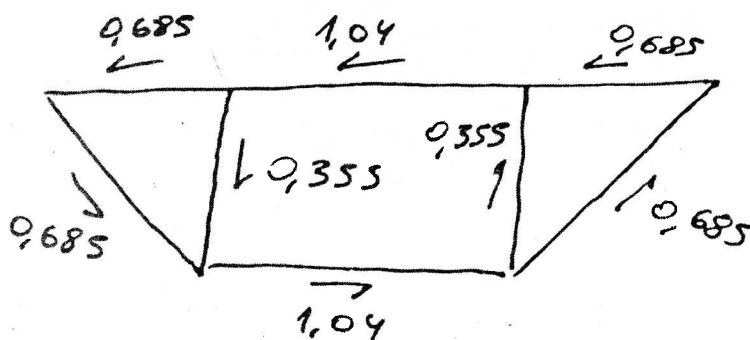
$$\Rightarrow \text{Despejamos } \boxed{\theta = 4,23 \times 10^{-5} \text{ rad/m}}$$

Luego sustituimos en q_i :

$$\begin{cases} q_1 = q_3 = 137,05 \text{ kN/m} \\ q_2 = 208,20 \text{ kN/m} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \tau_1 = \tau_3 = \frac{q_1}{e} = 0,685 \text{ MPa} ; \tau_2 = \frac{q_2}{e} = 1,04 \text{ MPa}$$

En zonas de interacción es la diferencia



Unidades
MPa