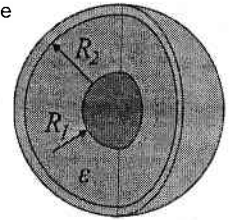


Física 3
Examen julio 2023

Ejercicio 1.- Sea un sistema de conductores compuesto por dos cascarones esféricos concéntricos, de radios R_1 y R_2 ($R_1 < R_2$). El espacio entre las dos superficies conductoras está lleno de un material con permitividad dieléctrica ϵ .



- Enuncie la ley de Gauss para el campo eléctrico.
- Defina y explique el concepto de capacitancia (o capacidad) para un sistema de conductores y calcúlela para los cascarones de la figura.

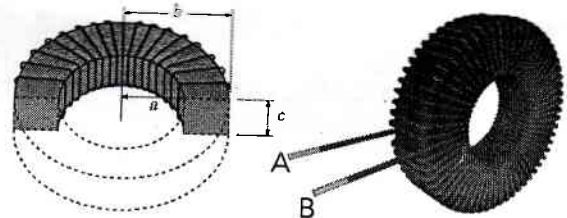
Se cargan los conductores hasta establecer una diferencia de potencial ΔV_0 entre ellos, y luego se conectan los cascarones por intermedio de una resistencia R .

- Calcule (con todo detalle) la intensidad por la resistencia en función del tiempo.

Ahora, en un nuevo experimento, se cargan los conductores hasta establecer una diferencia de potencial ΔV_0 entre ellos y luego se conectan los cascarones por intermedio de un inductor con autoinductancia L .

- Calcule la corriente máxima por el inductor.

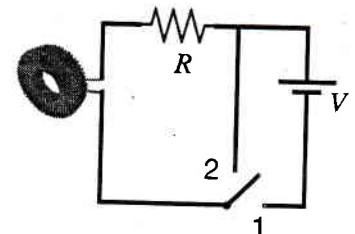
Ejercicio 2.- Se considera un toroide de un material con permeabilidad magnética μ , de sección cuadrada de lado c , diámetro interno a y externo b . Se enrolla en torno a él, como muestra la figura, N vueltas de alambre conductor.



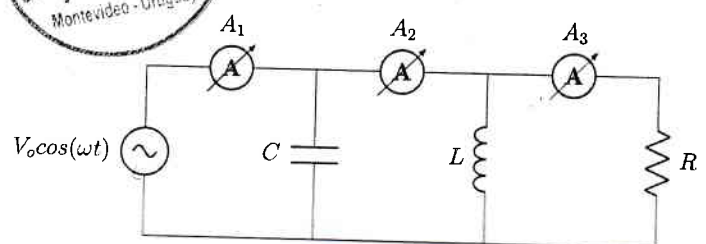
- Defina y explique el concepto de autoinductancia de un conductor.

- Calcule la autoinductancia entre los dos extremos A, B del alambre enrollado en el toroide descrito.

- Este sistema se conecta ahora al circuito de la figura. Considere que el interruptor ha estado conectado en la posición 1 por un largo tiempo (desde $t = -\infty$). Al conectarlo en la posición 2, ¿cuánto vale la energía disipada en la resistencia R después de transcurrido un largo tiempo (hasta $t = +\infty$)?



Ejercicio 3.- Considere el circuito R, L, C en paralelo que se muestra en la figura. El circuito está alimentado por una diferencia de potencial $V(t) = V_0 \cos(\omega t)$ e incluye tres amperímetros de corriente alterna considerados ideales (miden la amplitud de la corriente que los atraviesa sin afectarla).



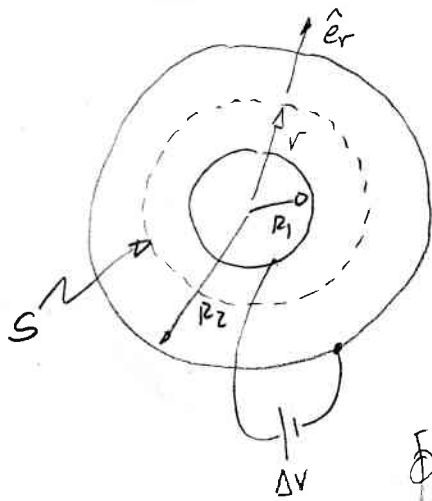
- ¿A qué valor tiende la lectura del amperímetro A_1 si la frecuencia de la fuente es muy baja ($\omega \rightarrow 0$)?
- ¿A qué valor tiende la lectura del amperímetro A_1 si la frecuencia de la fuente es muy alta ($\omega \rightarrow \infty$)?
- Represente en un diagrama fasorial el voltaje aplicado y las corrientes por cada uno de los tres elementos del circuito.
- ¿Para qué valor de ω la lectura del amperímetro A_1 es mínima? Sea ω_0 esa frecuencia.
- Para la frecuencia ω_0 hallada en d), determine la lectura de cada uno de los tres amperímetros expresando los resultados en función de V_0, R, L y C .
- Calcule la potencia media disipada en el circuito para $\omega = \omega_0$ y para $\omega = 2\omega_0$. Compare y discuta los resultados obtenidos.

(Duración máxima 4 horas. Sus resultados tendrán algún valor en la medida en que estén debidamente justificados)

Ejercicio 4

a) Ley de Gauss: El flujo de campo eléctrico a través de una superficie cerrada, multiplicado por la constante de permitividad eléctrica del medio, es igual a la carga eléctrica neta encerrada dentro de dicha superficie.

b) La capacidad (o capacitancia) de un sistema eléctrico compuesto por dos conductores permite calcular la carga neta Q que se acumula en uno de los conductores cuando se establece una diferencia de potencial eléctrico ΔV entre ellos a través de la expresión $Q = C \Delta V$.



$$\vec{E} = E \hat{e}_r, \quad -\Delta V = - \int_{R_1}^{R_2} \vec{E} \cdot d\vec{r}$$



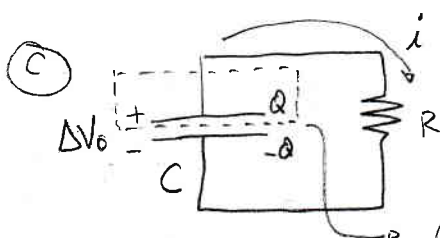
Por ley de Gauss $\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{s} = \frac{Q}{\epsilon_0}$

Φ_E

$$\oint_E = E(r) \cdot 4\pi r^2 = \frac{Q}{\epsilon_0} \quad \longrightarrow \quad \vec{E}(r) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \hat{e}_r$$

$$-\Delta V = - \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \int_{R_1}^{R_2} \frac{dr}{r^2} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left. \frac{1}{r} \right|_{R_1}^{R_2} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_1} \right) \quad \longrightarrow \quad \boxed{\Delta V = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right)}$$

$$\boxed{C = \frac{Q}{\Delta V} = \frac{4\pi\epsilon_0 R_1 R_2}{R_2 - R_1}}$$



$$\mathcal{O} = -\Delta V_0 + iR$$

$$\frac{q}{C} = -R \frac{dq}{dt}$$

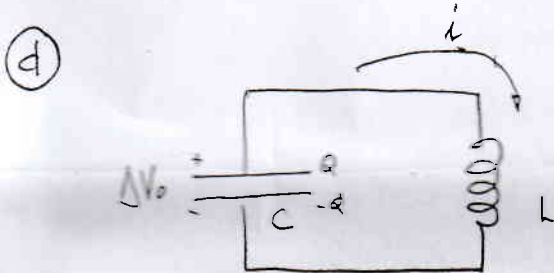
conservación de la carga $\Rightarrow i = -\frac{dq}{dt}$

$$-\frac{1}{RC} = \frac{1}{q} \cdot \frac{dq}{dt} \quad \leadsto \quad - \int_{t=0}^t \frac{dt}{RC} = \int_{t=0}^t \frac{1}{q} \frac{dq}{dt} dt = \int_{q(t=0)=q_0}^{q(t)} \frac{dq}{q} = \ln\left(\frac{q}{q_0}\right)$$

$$-\frac{t}{RC} = \ln\left(\frac{q}{q_0}\right) \leadsto q(t) = q_0 e^{-t/RC}$$



$$\left(i = -\frac{dq}{dt} \right) \longrightarrow \boxed{i(t) = \frac{q_0}{RC} e^{-t/RC}}$$



$$0 = -\Delta V_0 + L \frac{di}{dt}$$

$$\frac{q}{C} = L \frac{di}{dt} = -L \frac{dq}{dt^2} = -L \ddot{q}$$

$$\ddot{q} + \frac{1}{LC} q = 0$$

$$\longrightarrow q(t) = A \cos(\omega t) \quad / \quad \omega = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

$$\left. \begin{array}{l} q(t=0) = Q \\ i(t=0) = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow q(t) = Q \cos(\omega t)$$

$$\boxed{i(t) = \frac{Q}{\sqrt{LC}} \sin(\omega t)}$$

$$\boxed{i_{\max} = \frac{Q}{\sqrt{LC}}}$$

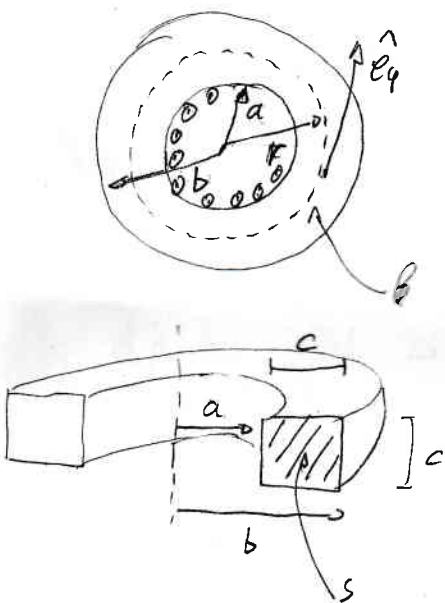
Ejercicio (2)

- (a) Considere un conductor eléctrico por el cual circula una corriente. La auto-inductancia L de este conductor permite calcular la fem inducida $\mathcal{E}$ entre los extremos del conductor a través de la expresión $\mathcal{E} = L \frac{di}{dt}$.

La fem. (fuerza electro-motriz) inducida es la integral de la componente del campo eléctrico inducido a lo largo de una curva por el conductor. Este campo eléctrico es inducido por las variaciones del flujo de campo magnético generado por la propia corriente por el conductor.

La auto-inductancia L sólo depende de la geometría del conductor y de la permeabilidad magnética del medio donde se induce el flujo magnético.

(b)



Ley de Ampère = $\oint \vec{B} \cdot d\vec{e} = \mu N i$

$B(r) \cdot 2\pi r = \mu N i$

$\vec{B} = B(r) \hat{e}_\phi = \frac{\mu N i}{2\pi r} \hat{e}_\phi$

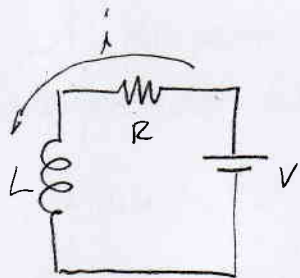
$\vec{B} = \frac{\mu N i}{2\pi r} \hat{e}_\phi$

$\Phi_B = \int_S \vec{B} \cdot d\vec{A} = \frac{\mu N^2 i}{2\pi} c \int_a^b \frac{dr}{r} = \frac{\mu N^2 i c}{2\pi} \ln\left(\frac{b}{a}\right)$

$|\mathcal{E}| = \left| \frac{d\Phi_B}{dt} \right| = \underbrace{\frac{\mu N^2 c}{2\pi} \ln\left(\frac{b}{a}\right)}_L \frac{di}{dt}$

$L = \frac{\mu N^2 c}{2\pi} \ln\left(\frac{b}{a}\right)$

(3)



$t=0$

$$i_0 = \frac{V}{R} \Rightarrow E_L = \frac{1}{2} L i^2 = \frac{L}{2} \frac{V^2}{R^2}$$

La energía "almacenada" en el campo magnético de la bobina en $t=0$ es enteramente disipada en la resistencia

$$E_R = \frac{\mu N^2 C}{4 \pi} L_h \left(\frac{b}{a} \right) \frac{V^2}{R^2}$$

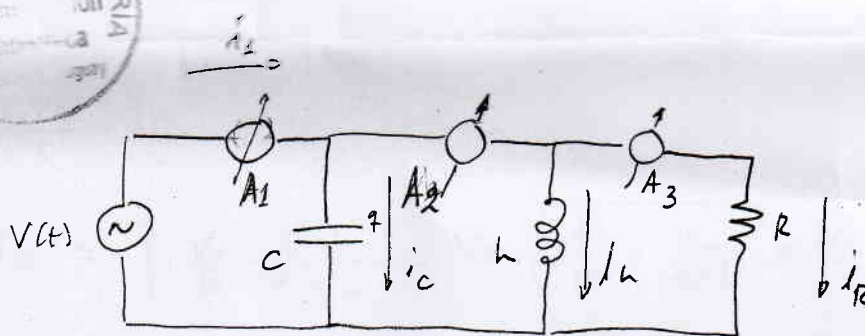


Ejercicio 3

a) $i_1 \rightarrow \infty$

b) $i_1 \rightarrow \infty$

c)



$$V(t) = V_0 \cos(\omega t) = \operatorname{Re}(V_0 e^{j\omega t})$$

$$q = C V(t) \rightarrow i_c = C \frac{dV}{dt} = -C V_0 \omega \sin(\omega t)$$

$$i_c = j\omega C V_0 e^{j\omega t}$$

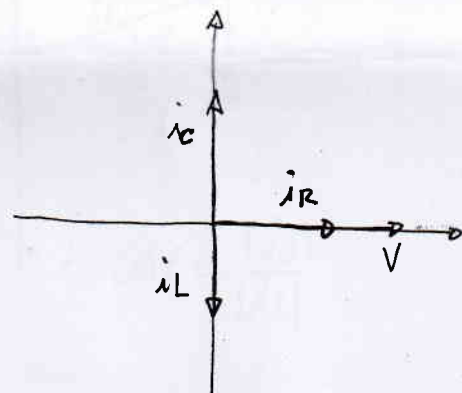
$$\frac{di_L}{dt} = \frac{V(t)}{L} \rightarrow i_L = \frac{V_0 \sin(\omega t)}{\omega L}$$

$$i_L = -j \frac{V_0}{\omega L} e^{j\omega t}$$

$$i_R = \frac{V(t)}{R} \rightarrow i_R = \frac{V_0 \cos(\omega t)}{R}$$

$$i_R = \frac{V_0}{R} e^{j\omega t}$$

5/6

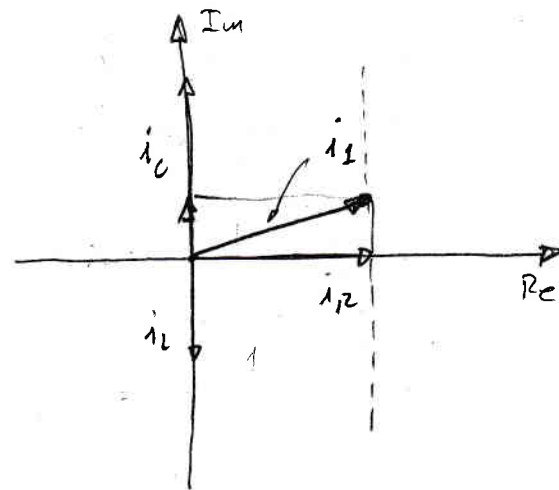


4

Del diagrama fasorial se desprende fácilmente que $i_{1M} = i_{R2}$, lo que ocurre cuando $|i_C| = |i_L|$

$$j\omega C V_o = j \frac{V_o}{\omega L}$$

$$\boxed{\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}}}$$

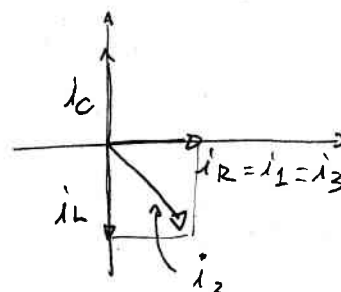


⑤

$$i_1 = i_R = \frac{V_o}{R}$$

$$i_2 = i_L + i_R = \left| \frac{V_o}{R} - j \frac{V_o}{\omega L} \right| = V_o \sqrt{\frac{1}{R^2} + \frac{1}{\omega^2 L^2}} = V_o \sqrt{\frac{1}{R^2} + \frac{C}{L}}$$

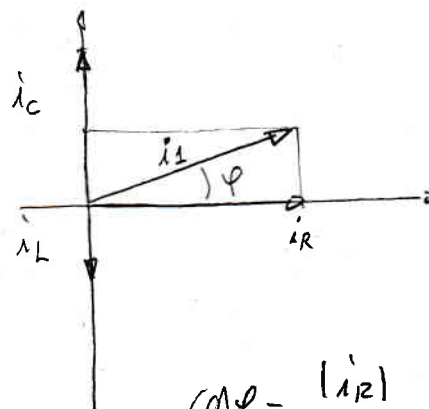
$$i_3 = i_{R2} = \frac{V_o}{R}$$



⑥

$$\overline{P}_{\omega_0} = \frac{1}{2} |V_o| |i_{R2}| = \frac{V_o^2}{2R}$$

$$\begin{aligned} \overline{P}_{2\omega_0} &= \frac{1}{2} V_o |i_1| \cos \varphi = \\ &= \frac{1}{2} V_o |i_1| \frac{|i_{R2}|}{|i_1|} = \overline{P}_{\omega_0} \end{aligned}$$



$$\cos \varphi = \frac{|i_{R2}|}{|i_1|}$$

El cambio de frecuencia solo cambia las corrientes por el condensador e inductor, no modifica la corriente (y voltaje) por la resistencia que es el único elemento disipativo.