

Introducción a la Física Moderna - Edición 2024

Examen - 30/7/2024



- Trabaje prolijamente y justifique debidamente su trabajo
- Para pasar al examen oral se requiere al menos un problema y medio correctamente resueltos
- La duración del escrito es de 3 horas

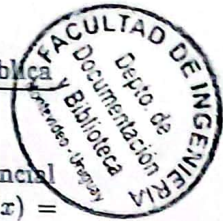
Problema 1. En el marco del laboratorio, una partícula de masa m se aproxima con velocidad u a otra partícula idéntica inicialmente en reposo.

- (a) A partir de la fórmula de adición de velocidades, determine la velocidad del referencial en el que el momento total es cero (referencial del centro de masa). Verifique que en el límite $u \ll c$ el resultado es consistente con lo esperado clásicamente (recuerde que $(1+x)^n \simeq 1 + nx$ si $x \ll 1$).
- (b) Reobtenga el resultado anterior a partir de la transformación de Lorentz de los momentos.
- (c) Si luego del choque hay una sola partícula, determine su masa, analice el límite clásico y comente el resultado.

Problema 2. Considere dos placas metálicas de diferentes materiales cuyas áreas A_1 y A_2 satisfacen que $A_2 = 7A_1$. Cuando sobre ellas incide luz de igual intensidad pero diferente frecuencia, se observa que el número de electrones emitidos por efecto fotoeléctrico por unidad de tiempo en la segunda placa es el triple de los emitidos por la primera.

- (a) Determine la razón entre las longitudes de onda de los haces incidentes.
- (b) Sabiendo que la luz incidente sobre la primera placa posee la longitud de onda umbral de ese material, que el potencial de corte en el segundo caso es $2V$, y que las funciones trabajo satisfacen la relación $\phi_1/\phi_2 = 3/5$, determine la frecuencia de los haces incidentes.
- (c) El electrón de un átomo hidrogenoide con número atómico Z sufre una transición entre los niveles $n = 5$ y $n = 4$. Si el fotón emitido incide sobre la placa 1, ¿cuál es el mínimo valor de Z que asegura que ocurre efecto fotoeléctrico?

1/6
1



Problema 3. Considere una partícula que se mueve bajo la influencia de cierto potencial unidimensional $V(x)$ desconocido, definido en $(-\infty, +\infty)$. Se sabe que la función $\varphi(x) = Ae^{-a|x|}$, con $a > 0$, es autofunción del Hamiltoniano de la partícula.

- (a) Determine la constante de normalización en función de a .
- (b) Muestre que la derivada de $\varphi(x)$ presenta una discontinuidad en $x = 0$. ¿Qué implica esto en relación al potencial?
- (c) Calcule el valor esperado de la posición, $\langle X \rangle$
- (d) Calcule la probabilidad de que la partícula se encuentre en la región $x > 0$.

2/6
2



Problema 1.

- (a) Si u_1 y u'_1 son las velocidades de la partícula incidente en el laboratorio y en el referencial del centro de masa (RCM), y v es la velocidad de dicho referencial en relación al laboratorio, se cumple que:

$$u'_1 = \frac{u_1 - v}{1 - \frac{u_1 v}{c^2}} \quad (1)$$

Mientras tanto, la segunda partícula se encuentra en reposo en el laboratorio, por lo que $u_2 = 0$ y $u'_2 = -v$. Dado que en el RCM se cumple que $u'_1 = -u'_2$, concluimos que:

$$v = \frac{u - v}{1 - \frac{uv}{c^2}} \Rightarrow \frac{uv^2}{c^2} + u - 2v = 0. \quad (2)$$

Resolviendo para v obtenemos dos soluciones:

$$v = v_{\pm} = \frac{c^2 \pm c^2 \sqrt{1 - u^2/c^2}}{u} = \frac{c^2}{u} \left(\frac{\gamma \pm 1}{\gamma} \right), \quad (3)$$

pero dado que $v_+ > c$, concluimos que

$$v = \frac{c^2}{u} \left(\frac{\gamma - 1}{\gamma} \right). \quad (4)$$

Nótese que en el límite $u \ll c$ se tiene que $\gamma \simeq 1 + \frac{1}{2} \frac{u^2}{c^2}$. En consecuencia:

$$v \simeq \frac{u^2}{c} \left(1 + \frac{u^2}{c^2} - 1 \right) = u/2, \quad (5)$$

por lo que $u'_1 = -u'_2 = u/2$, coincidiendo con el resultado clásico.

- (b) La transformación de Lorentz para los momentos es

$$p' = \gamma(v) \left(p - \frac{E v}{c^2} \right), \quad (6)$$

por lo que:

$$\begin{cases} p'_1 = \gamma(v) \left(p_1 - \frac{E_1 v}{c^2} \right) \\ p'_2 = \gamma(v) \left(0 - \frac{E_2 v}{c^2} \right) \end{cases} \quad (7)$$

Empleando que $p_1 = \gamma(u) m u$, $E_1 = \gamma(u) m c^2$, $E_2 = m c^2$, y $p'_1 + p'_2 = 0$, se obtiene que

$$v = \frac{\gamma(u) u}{1 + \gamma(u)} \quad (8)$$

Es sencillo verificar que este resultado coincide con el de la parte a y que si $u \ll c$ (o sea, si $\gamma \rightarrow 1$) se satisface que $v = u/2$.

- (c) En el RCM se tiene que $p'_{inicial} = p'_{final} = 0$, por lo que la partícula formada de masa M se encontrará en reposo. Como la energía se conserva, podemos evaluar E' antes del choque:

$$E' = m \gamma(u'_1) c^2 + m \gamma(u'_2) c^2 = 2 m \gamma(v) c^2. \quad (9)$$

Por otro lado, la constancia de la norma del cuadrivector momento implica que

$$E'^2/c^2 - p'^2 = M^2 c^2 \quad (10)$$

3/6



A partir de las ecuaciones anteriores se obtiene que

$$M = 2m\gamma(v) \quad (11)$$

Nótese que en el límite no relativista $M \rightarrow 2m$, por lo que la masa se conserva.

Problema 2.

- (a) La cantidad de electrones emitidos por unidad de tiempo por efecto fotoeléctrico será proporcional a la cantidad de fotones incidentes por unidad de tiempo, que viene dada por IA/E donde E es la energía de cada fotón, e I es la intensidad de la luz.

Por lo tanto:

$$\frac{dN_1}{dt} \propto \frac{IA_1}{E_1} \quad (12)$$

y de manera similar

$$\frac{dN_2}{dt} \propto \frac{IA_2}{E_2} \quad (13)$$

dado que $A_2 = 7A_1$ y $\frac{dN_2}{dt} = 3\frac{dN_1}{dt}$

$$3\frac{dN_1}{dt} \propto \frac{7A_1}{E_2}, \quad (14)$$

entonces

$$E_2 = \frac{7}{3}E_1. \quad (15)$$

Dado que para un fotón $E = \frac{hc}{\lambda}$

$$\frac{\lambda_2}{\lambda_1} = \frac{3}{7}. \quad (16)$$

- (b) Las frecuencias de la luz están relacionadas por

$$\nu_2 = \frac{7}{3}\nu_1. \quad (17)$$

Para el primer plato tenemos que

$$h\nu_1 = \phi_1, \quad (18)$$

y para el segundo plato:

$$2V = \frac{h\nu_2 - \phi_2}{e}, \quad (19)$$

we know

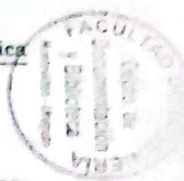
$$\phi_2 = \frac{5}{3}\phi_1 = \frac{5}{3}h\nu_1 = \frac{5}{3}\frac{3}{7}h\nu_1 = \frac{5}{7}h\nu_2, \quad (20)$$

entonces

$$2V = \frac{h\nu_2 - \frac{5}{7}h\nu_2}{e} = \frac{h}{e}\frac{2}{7}\nu_2, \quad (21)$$

Por lo tanto

$$\nu_2 = 7\frac{eV}{h}, \quad \nu_1 = 3\frac{eV}{h}. \quad (22)$$



(c) La energía del fotón es

$$E_f = \frac{m_e c^4 Z^2}{8e_0^2 h^2} \left(\frac{1}{4^2} - \frac{1}{5^2} \right) = 13,6 \text{ eV } Z^2 \left(\frac{1}{4^2} - \frac{1}{5^2} \right) = 0,306 \text{ eV } Z^2, \quad (23)$$

y

$$\phi_1 = E_1 = h\nu_1 = 3 \text{ eV}. \quad (24)$$

Para que se produzca el efecto fotoeléctrico $E_f \geq \phi_1$. Por lo tanto

$$0,306 \text{ eV } Z^2 \geq 3 \implies Z \geq 3,13. \quad (25)$$

Dado que Z es un número entero

$$Z \geq 4. \quad (26)$$

Problema 8.

(a) La probabilidad de que la partícula esté en algún lugar en $(-\infty, \infty)$ debe ser uno, entonces

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\phi|^2 dx = 1, \quad (27)$$

con $\phi = Ae^{-a|x|}$. Tenemos que

$$1 = |A|^2 \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2a|x|} dx = |A|^2 \int_0^{\infty} e^{-2ax} dx + |A|^2 \int_{-\infty}^0 e^{2ax} dx, \quad (28)$$

efectuando el cambio de variable $x \rightarrow -y$

$$\int_{-\infty}^0 e^{2ax} dx = - \int_0^{\infty} e^{-2ay} dy = + \int_0^{\infty} e^{-2ay} dy, \quad (29)$$

entonces

$$1 = |A|^2 2 \int_0^{\infty} e^{-2ax} dx = |A|^2 \frac{1}{-2a} \times 2 \int_0^{\infty} \frac{d}{dx} e^{-2ax} dx = |A|^2 \frac{1}{-2a} \times 2 e^{-2ax} \Big|_{x=0}^{x=\infty} = \frac{|A|^2}{a}. \quad (30)$$

Por lo tanto

$$\boxed{A = \sqrt{a} e^{ic}}, \quad (31)$$

donde c es real. Para simplificar podemos tomar $c = 0$ y $A = \sqrt{a}$, de donde se obtiene

$$\phi = \sqrt{a} e^{-a|x|}. \quad (32)$$

(b) En $x = 0$ tenemos que $\phi(0) = \sqrt{a}$. Ahora consideremos la derivada $\phi'(x) = \frac{d}{dx} \phi(x)$ cuando $x \rightarrow 0$. En la región $x > 0$:

$$\phi(x) = \sqrt{a} e^{-ax} \implies \phi'(x) = -a\phi(x) \implies \lim_{x \rightarrow 0^+} \phi'(x) = -a^{3/2}, \quad (33)$$

mientras que en $x < 0$:

$$\phi(x) = \sqrt{a} e^{ax} \implies \phi'(x) = a\phi(x) \implies \lim_{x \rightarrow 0^-} \phi'(x) = +a^{3/2}. \quad (34)$$

Luego, como ϕ' presenta un salto de valor $2a^{3/2}$ en $x = 0$, concluimos que es discontinua en ese punto.

La derivada solo puede ser discontinua si el potencial presenta una discontinuidad infinita en ese punto (lo mismo ocurre, por ejemplo, en los extremos de un pozo infinito).

(c) El valor esperado de la posición es

$$\langle \hat{X} \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} \phi^*(x) x \phi(x) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} x |\phi(x)|^2 dx. \quad (35)$$

Nótese que, como $|\phi(x)|^2 = ae^{-2|x|}$ es una función par, y x es impar, el integrando $f(x) = |\phi(x)|^2 x$ es una función impar, y, por lo tanto, su integral en toda la recta es cero. En consecuencia, $\langle \hat{X} \rangle = 0$.

(d) La probabilidad de que la partícula se encuentre en la región $x \geq 0$ es

$$P(x > 0) = \int_0^{\infty} |\phi(x)|^2 dx = a \int_0^{\infty} e^{-2ax} dx = \frac{1}{2}. \quad (36)$$

Otra forma de obtener el mismo resultado es observar que $|\phi(x)|^2$ es una función par, por lo que las probabilidades $P(x < 0)$ y $P(x > 0)$ son iguales y deben sumar uno.