

Mecánica Newtoniana

Examen, 28 de enero de 2021

- Duración de la prueba: **3 horas**.
- Mínimo para suficiencia: **un ejercicio completo y la mitad del global de la prueba**.
- Datos:
 - Momento de inercia de una barra homogénea, de masa M y largo L alrededor de un eje perpendicular a la misma pasando por su centro : $I = \frac{ML^2}{12}$
 - Momento de inercia de un disco (homogéneo, de masa m y radio r) alrededor de un eje perpendicular a su plano y pasando por su centro: $I = \frac{1}{2}mr^2$.

Ejercicio 1 Una partícula de masa m se mueve bajo la influencia de una fuerza central $\vec{F} = f\hat{e}_r$ de centro de fuerzas O .

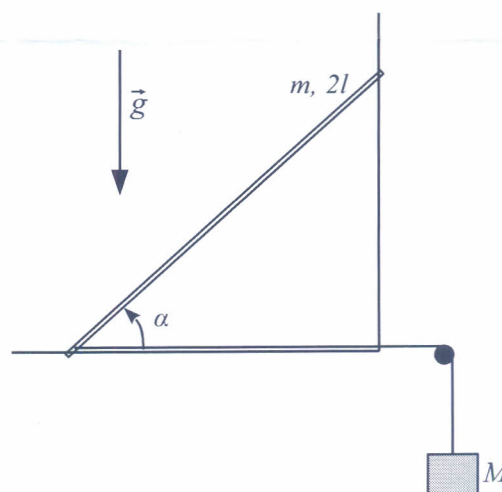
- a. Pruebe que el momento angular de la partícula con respecto a O se conserva.
- b. Considere de ahora en más que la fuerza central tiene la siguiente forma:

$$f = f(r) = -\frac{k}{r^2} - \frac{k'}{r^3},$$

con $k, k' > 0$. Inicialmente $r = r_0$ (donde se cumple: $kr_0 = k'$) y la velocidad de la partícula es de módulo v y perpendicular al vector posición.

- I. Halle v_C , el valor de v que asegura que la partícula se mueva siguiendo una órbita circular; determine el período de dicho movimiento.
- II. Para $v = \sqrt{2}v_C$, halle la órbita $r = r(\theta)$ que describe la partícula.

Ejercicio 2 Considere una barra homogénea de masa m y largo $2l$ cuyos extremos se mueven sobre guías lisas (vínculo bilateral), una de ellas horizontal y la otra vertical. Un bloque de masa M cuelga de un hilo inextensible y de masa despreciable que lo une al extremo de la barra que se mueve sobre la guía horizontal. El hilo pasa a través de un soporte puntual, carente de fricción y a la altura de la guía horizontal. Inicialmente el sistema se encuentra en reposo y la barra forma un ángulo $\alpha = \pi/4$ con la horizontal.



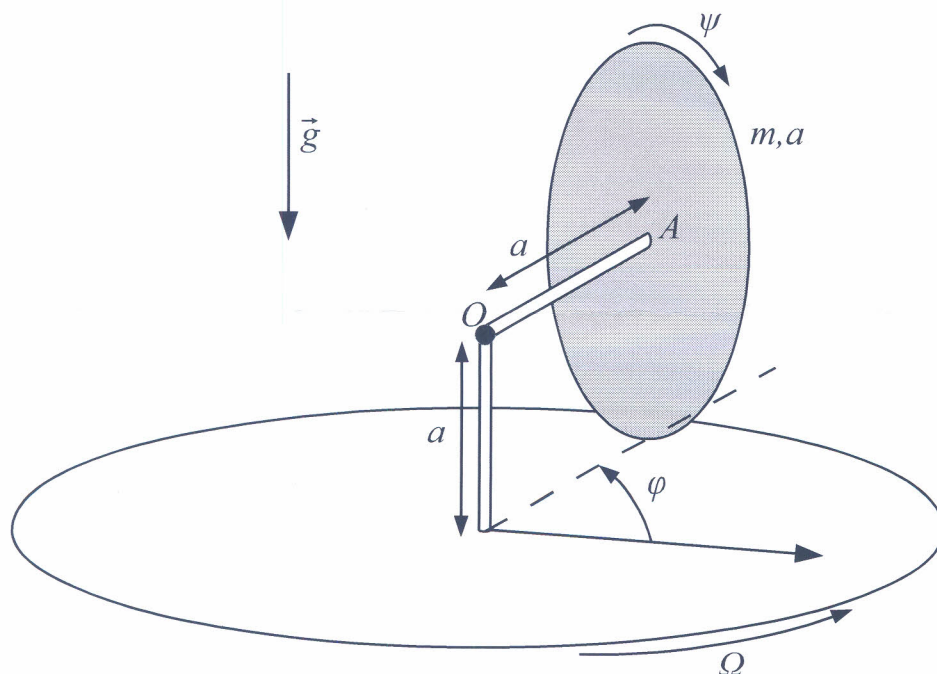
- a. Determine la masa M que permite mantener al sistema en reposo en la configuración especificada.

b. Suponga ahora que el sistema parte del reposo pero la masa M es *la mitad* de la hallada anteriormente y que el hilo es lo suficientemente largo para que la masa no alcance el soporte puntual en su movimiento posterior. Bajo estas condiciones:

- I. Muestre que el ángulo α satisface una ecuación de la forma: $\ddot{\alpha} = f(\alpha)$.
- II. Halle la aceleración angular inicial de la barra.

Ejercicio 3 Sea un cuerpo rígido formado por un disco homogéneo de masa m , centro A y radio a y una barra OA de masa despreciable, largo a y perpendicular al disco por su centro. La barra OA esta unida en O a un soporte vertical por medio de una articulación esférica lisa, situada a una altura a de un plano horizontal que gira respecto a un sistema inercial con velocidad angular constante Ω , alrededor de la vertical que pasa por O . Inicialmente el disco esta en reposo, apoyado sobre este plano. El contacto entre el disco y el plano es rugoso, con coeficiente de rozamiento dinámico f . Se sugiere trabajar en este ejercicio en términos de φ , ángulo que forma OA con respecto a una horizontal fija al sistema inercial y ψ , ángulo de giro del disco alrededor de OA (ver figura).

- a. Halle el momento angular del rígido con respecto al punto O .
- b. Determine las ecuaciones de movimiento del rígido válidas mientras el mismo desliza con respecto al plano horizontal giratorio.



Ejercicio 7

a) $\vec{L}_0 = \vec{r} \times \vec{p}$, $\vec{p} = m\vec{v}$

derivando $\vec{L}_0$ en el tiempo: $\dot{\vec{L}}_0 = \underbrace{\dot{\vec{r}} \times \vec{p}}_{=0} + \underbrace{\vec{r} \times \dot{\vec{p}}}_{= \vec{F}} = \vec{F}$ (2da ley de Newton)

$\Rightarrow \dot{\vec{L}}_0 = \vec{r} \times \vec{F}$, $\vec{F}$ es central: $\vec{F} = f(r)\hat{e}_r$, $\vec{r} = r\hat{e}_r \Rightarrow \vec{r} \times \vec{F} = 0$

$\Rightarrow \boxed{\dot{\vec{L}}_0 = 0} \iff \vec{L}_0 \text{ se conserva}$

b.I) 2da ley de Newton según $\hat{e}_r$: $f(r) = m(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)$ $f(r_0) = -m r_0 \dot{\theta}^2$

buscamos una órbita circular, $r = r_0 \forall t$: $\dot{r} = 0, \ddot{r} = 0$

A la vez, el movimiento debe ser uniforme por la conservación de L ($L = m r^2 \dot{\theta} = m r_0^2 \dot{\theta}$
 $\Rightarrow \dot{\theta} = \text{cte} = \dot{\theta}_0$)

$\dot{\theta} = \dot{\theta}_0 = v_0/r_0$: $f(r_0) = -m r_0 (v_0/r_0)^2$

$-\frac{K}{r_0^2} - \frac{K'}{r_0^3} = -\frac{m v_0^2}{r_0} \rightarrow r_0 = K'/K$ $v_0^2 = \frac{2K^2}{mK'}$

• Período del movimiento: $T = 2\pi/\dot{\theta} = 2\pi r_0/v_0 = 2\pi \frac{K'}{K} \frac{1}{v_0} = \pi \sqrt{\frac{2mK'^3}{K^4}}$

b.II) $v = \sqrt{2} v_0$: $L = m r_0 v \Rightarrow L^2 = m^2 r_0^2 v^2 = m^2 r_0^2 2 v_0^2 = 4 m K'$ ($r_0 = K'/K$)

Binet: $\frac{F(u)}{u^2} = ar = -\frac{L^2 u^2}{m f} (u'' + u) = -4 K' u^2 (u'' + u)$

$F(u) = +K u^2 + K' u^3 = +4 K' u^2 (u'' + u)$: $u'' + \frac{3}{4} u = \frac{K}{4 K'} = \frac{1}{4 r_0}$

$u(\theta) = u_H(\theta) + u_P$, $u_H(\theta)$: $u_H'' + \frac{3}{4} u_H = 0$: $u_H = \alpha \cos \frac{\sqrt{3}}{2} \theta + \beta \sin \frac{\sqrt{3}}{2} \theta$

$u_P = \text{cte}$: $\frac{3}{4} u_P = \frac{1}{4 r_0}$: $u_P = \frac{1}{3 r_0}$

$\Rightarrow u(\theta) = \alpha \cos \frac{\sqrt{3}}{2} \theta + \beta \sin \frac{\sqrt{3}}{2} \theta + \frac{1}{3 r_0}$

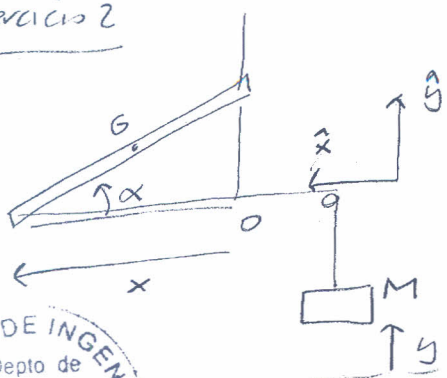
$u(\theta=0) = \frac{1}{r_0}$

$u'(\theta=0) = 0$ ($\dot{r}(\theta=0) = 0$)

$\boxed{u(\theta) = \frac{1}{3 r_0} \left(1 + 2 \cos \frac{\sqrt{3}}{2} \theta \right)}$
(luego $r(\theta) = 1/u(\theta)$)

Ejercicio 2

a)



- Se trata de un sistema con un grado de libertad (consideremos el ángulo α) ; vamos a escribir x (coordenada del extremo horizontal de la barra) e y (altura de M medida desde su posición inicial) en función de α :
 $x = 2l \cos \alpha$
 hilo de largo constante: $x - y = x(t=0) - y(t=0)$
 $= 2l \cos \alpha(t=0)$

La energía potencial (gravitatoria) del sistema es:

$$U = mgy_G + Mgy = mgl \sin \alpha + Mg 2l (\cos \alpha - \cos \alpha_0) \quad (\alpha_0 = \alpha(t=0) = \pi/4)$$

- El sistema permanecerá en reposo si la configuración del mismo es de eq. $\Leftrightarrow \frac{dU}{d\alpha} \Big|_{\alpha_0} = 0$:

$$(mgl \cos \alpha - 2Mgl \sin \alpha) \Big|_{\alpha=\alpha_0} = 0; \quad M = \frac{m}{2} = \frac{m}{2}$$

b.I) La energía del sistema es:

$$E = \frac{1}{2} M \dot{y}^2 + Mgy + \frac{1}{2} m v_G^2 + \frac{1}{2} I_G \dot{\alpha}^2 + mgl \sin \alpha; \quad M = m/4, \quad I_G = \frac{m l^2}{3}$$

$$\dot{y} = \dot{x} = -2l \sin \alpha \dot{\alpha}$$

$$v_G^2 = \dot{x}_G^2 + \dot{y}_G^2 = (\dot{x}/2)^2 + \dot{y}_G^2 = l^2 \dot{\alpha}^2$$

$$E = \frac{1}{2} m l^2 \sin^2 \alpha \dot{\alpha}^2 + \frac{1}{2} mgl (\cos \alpha - \cos \alpha_0) + \frac{1}{2} m l^2 \dot{\alpha}^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{3} m l^2 \right) \dot{\alpha}^2 + mgl \sin \alpha$$

Como se conserva: $E = E(t=0) = mgl \sin \alpha_0$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} m l^2 \sin^2 \alpha \dot{\alpha}^2 + \frac{1}{2} mgl (\cos \alpha - \cos \alpha_0) + \frac{1}{2} m l^2 \dot{\alpha}^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{3} m l^2 \right) \dot{\alpha}^2 + mgl (\sin \alpha - \sin \alpha_0) = 0$$

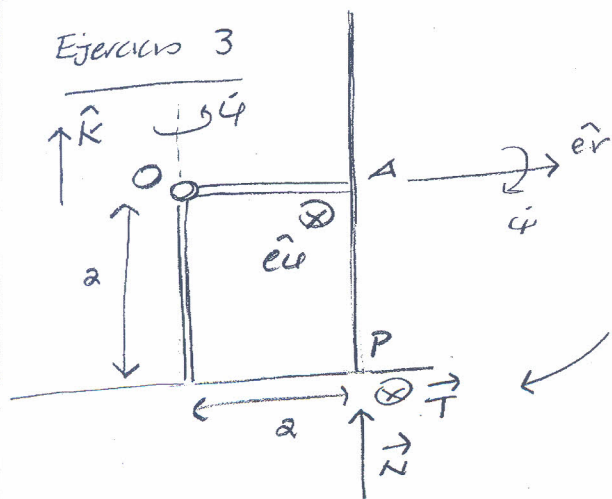
$$\Rightarrow \dot{\alpha}^2 = \frac{g/l [2(\sin \alpha_0 - \sin \alpha) + \cos \alpha_0 - \cos \alpha]}{(4/3 + \sin^2 \alpha)} = f(\alpha)$$

b.II) derivando la anterior: $2\dot{\alpha}\ddot{\alpha} = \frac{df}{d\alpha} \dot{\alpha} : \ddot{\alpha} = \frac{1}{2} \frac{df}{d\alpha}$

$$\ddot{\alpha}(t=0) = \frac{1}{2} \frac{df}{d\alpha} \Big|_{\alpha_0} = \frac{g/l}{(4/3 + \sin^2 \alpha_0)} \left\{ \frac{-2 \sin \alpha_0 + \sin \alpha_0}{(4/3 + \sin^2 \alpha_0)} \right\} = -\frac{1/\sqrt{2}}{(4/3 + 1/2)} g/l$$

(<0, como es esperable ya que $M < M_{eq}$ y la barra tiene a bajar)

Ejercicio 3



El punto P, como parte del rígido, tiene velocidad inicial nula; en cambio, como parte del plano:
 $\vec{v}_P(\text{plano}) = a\Omega \hat{e}_{\hat{u}}$: el rígido desliza sobre el
 camiento y la fricción ejercida por el plano sobre el
 mismo tiene el sentido indicado en este diagrama

a) $\vec{L}_O = I_O \vec{\omega}$ ($\vec{v}_O = 0$)

$\vec{\omega} = \dot{\varphi} \hat{K} + \dot{\varphi} \hat{e}_r$

$I_O \{\hat{e}_r, \hat{e}_{\hat{u}}, \hat{K}\} = \begin{pmatrix} \frac{ma^2}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{ma^2}{4} + ma^2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{ma^2}{4} + ma^2 \end{pmatrix} = \frac{ma^2}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5/2 & 0 \\ 0 & 0 & 5/2 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow \vec{L}_O = \frac{ma^2}{2} \left(\frac{5}{2} \dot{\varphi} \hat{K} + \dot{\varphi} \hat{e}_r \right)$

b) $\dot{\vec{L}}_O = \vec{M}_O^{(ext)}$ ($\dot{\vec{v}}_O = 0$)
 $= a(\hat{e}_r - \hat{K}) \times (T\hat{e}_{\hat{u}} + N\hat{K}) + mga\hat{e}_{\hat{u}}$ ($T=fN$)
 $= 2fN\hat{e}_r + 2(mg-N)\hat{e}_{\hat{u}} + 2fN\hat{K}$

Por otro lado: $\dot{\vec{L}}_O = \frac{ma^2}{2} \left(\frac{5}{2} \ddot{\varphi} \hat{K} + \ddot{\varphi} \hat{e}_r + \dot{\varphi} \hat{e}_{\hat{u}} \right) = \frac{ma^2}{2} \left(\frac{5}{2} \ddot{\varphi} \hat{K} + \ddot{\varphi} \hat{e}_r + \dot{\varphi} \hat{e}_{\hat{u}} \right)$

$\Rightarrow \begin{cases} \hat{e}_r) 2fN = \frac{ma^2}{2} \dot{\varphi} & (i) \\ \hat{e}_{\hat{u}}) 2(mg-N) = \frac{ma^2}{2} \dot{\varphi} \dot{\varphi} & (ii) \\ \hat{K}) 2fN = \frac{ma^2}{2} \left(\frac{5}{2} \ddot{\varphi} \right) & (iii) \end{cases}$

Entre (i) y (iii): $\left| \ddot{\varphi} = \frac{5}{2} \dot{\varphi} \right|$ (I)

Elimino N entre (i) y (iii): $\left| f(2mg - \frac{ma^2}{2} \dot{\varphi} \dot{\varphi}) = \frac{ma^2}{2} \dot{\varphi} \right|$ (II)

(alternativamente a lo anterior: integro (I) en el tiempo $\dot{\varphi} = \frac{5}{2} \dot{\varphi}$ lo y sustituyo

(i) y (iii) en (ii): $\dot{\varphi} + f\dot{\varphi}^2 = \frac{4}{5} f g a$ (II')