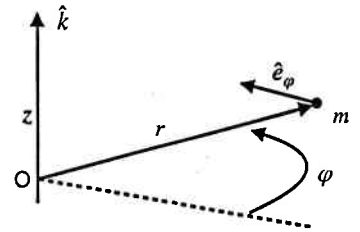


MECÁNICA NEWTONIANA
Examen - 27 de julio de 2022

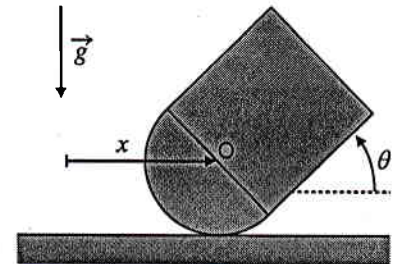
Ejercicio 1. - Una partícula de masa m se mueve sometida a una única fuerza $\vec{F}$ que verifica $\vec{F} = b\hat{k} \times \vec{v}$, donde $\vec{v}$ es la velocidad de la partícula, b una constante que caracteriza a la fuerza, $\hat{k}$ un versor fijo y la operación $\times$ es un producto vectorial. Para describir el movimiento de la partícula utilizaremos coordenadas cilíndricas r, φ, z , orientando el eje de la coordenada z a lo largo del versor $\hat{k}$. Consideraremos que la partícula parte desde una posición ubicada a una distancia r_0 del origen O del sistema de coordenadas, con una velocidad de módulo v_0 a lo largo de $\hat{e}_\varphi$, versor perpendicular a $\hat{k}$ y al vector posición $\vec{r}$.



- Demuestre que la magnitud $r^2(\dot{\varphi} - \frac{b}{2m})$ es una constante de movimiento para la partícula.
- Determine la ecuación de movimiento para la variable r .
- ¿Qué relación deben cumplir los parámetros r_0 y v_0 para que la partícula no se aleje más que una distancia r_m del punto O ?

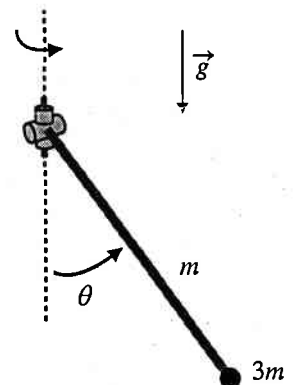
Ejercicio 2. - El cuerpo rígido de la figura está compuesto por un semi-disco homogéneo de radio R y masa M_d , y una placa cuadrada homogénea de lado $2R$ y masa M_p . El cuerpo se apoya sobre una superficie horizontal lisa. Se utilizarán las coordenadas x, θ para describir el movimiento de este cuerpo, siendo x la distancia horizontal del centro O del semi-disco a un punto de referencia, y θ el ángulo de rotación mostrado en la figura. El cuerpo se encuentra inicialmente en reposo y en la posición con $\theta = 0$.

Dato: el centro de masa de un semi-disco homogéneo está a una distancia $l = \frac{4R}{3\pi}$ de su centro. Se recuerda que el momento de inercia de una placa cuadrada de lado L y masa m , respecto de un eje perpendicular a su plano por el punto de cruce de las diagonales, vale $mL^2/6$.



- Determine la condición que debe verificar la relación M_d/M_p para que el cuerpo permanezca en reposo en la posición angular $\theta = 0$.
- Suponiendo ahora que $3M_d = M_p$, calcule las ecuaciones de movimiento del cuerpo rígido. *Sugerencia:* exprese las ecuaciones en función de la distancia d del centro de masa del rígido compuesto al punto O .
- Determine el valor de la velocidad angular del rígido para la posición angular $\theta = \pi/2$.

Ejercicio 3. - Un rígido está compuesto por un barra de largo L y masa m que tiene incrustada en un extremo una masa puntual de valor $3m$. El otro extremo está unido a dos articulaciones cilíndricas ortogonales, una vertical y otra horizontal. La articulación cilíndrica vertical es lisa, y la horizontal es viscosa. Esta última impone un momento de fuerzas de rozamiento $\vec{\mu}_h$ que se opone al giro de modo $\vec{\mu}_h = -\beta\vec{\omega}_a$, siendo β una constante y $\vec{\omega}_a$ la velocidad angular de rotación de dicha articulación.



- Calcule la cantidad de movimiento angular del rígido.
- Determine las ecuaciones de movimiento del rígido.
- Muestre que la masa puntual puede moverse siguiendo un movimiento circular. Halle el radio de dicho movimiento circular.

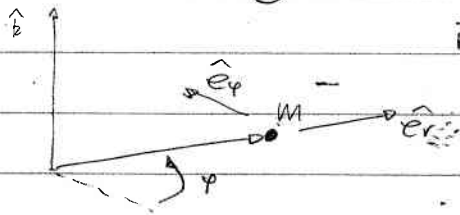
Nota: aunque es obvio, se recuerda que todas sus respuestas deben estar debidamente justificadas.



1/7

Ejercicio 1 -

a)



$$\vec{r} = r\vec{e}_r \rightarrow \vec{v} = \dot{r}\vec{e}_r + r\dot{\phi}\vec{e}_\phi$$

$$\vec{a} = (\ddot{r} - r\dot{\phi}^2)\vec{e}_r + (r\ddot{\phi} + 2\dot{r}\dot{\phi})\vec{e}_\phi$$

$$m\vec{a} \cdot \vec{e}_\phi = m(r\ddot{\phi} + 2\dot{r}\dot{\phi}) = b\dot{\phi}$$

$$\vec{F} = b\hat{k} \times \vec{v} = b\hat{k} \times (\dot{r}\vec{e}_r + r\dot{\phi}\vec{e}_\phi) = b\dot{\phi}\vec{e}_\phi - b\dot{r}\vec{e}_r$$

$$r\ddot{\phi} + 2\dot{r}\dot{\phi} = \frac{b\dot{r}}{m} \Rightarrow r\ddot{\phi} + 2\dot{r}\left(\dot{\phi} - \frac{b}{2m}\right) = 0$$

$$\text{Si (H)} \quad r^2\left(\dot{\phi} - \frac{b}{2m}\right) = c \text{ (cte)} \Rightarrow \frac{d}{dt}\left(r^2\left(\dot{\phi} - \frac{b}{2m}\right)\right) = 0$$

$$2r\dot{r}\left(\dot{\phi} - \frac{b}{2m}\right) + r^2\ddot{\phi} = 0$$

$$r\left(2\dot{r}\left(\dot{\phi} - \frac{b}{2m}\right) + r\ddot{\phi}\right) = 0$$

Efectivamente
la Hipótesis (H)
se verifica.

(b) Observación $\vec{F} \perp \vec{v} \Rightarrow$ es de potencia nula $\Rightarrow$ la energía
cinética es
constante

$$K = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\phi}^2) = c \text{ (cte)}$$

$$\text{Por otro lado sea } r^2\left(\dot{\phi} - \frac{b}{2m}\right) = l (= c \text{ (cte)})$$

$$\dot{r}^2 + r^2\left(\frac{l}{r^2} + \frac{b}{2m}\right)^2 = C (= c \text{ (cte)})$$

$$\dot{r}^2 + r^2\left(\frac{l^2}{r^4} + \frac{b^2}{4m^2} + \frac{bl}{mr^2}\right) = C$$

$$\dot{r}^2 + \frac{l^2}{r^2} + \frac{b^2}{4m^2}r^2 = C'$$

$$; C' = \frac{l^2}{r_0^2} + \frac{b^2 r_0^2}{4m^2}$$

c.i.)

$$l = r_0 v_0 - \frac{b r_0^2}{2m}$$

2/7

Ec. de movimiento para r (derivando):

$$2\ddot{r} - \frac{2\ell^2}{r^3} + \frac{b^2}{2m^2} r = 0.$$

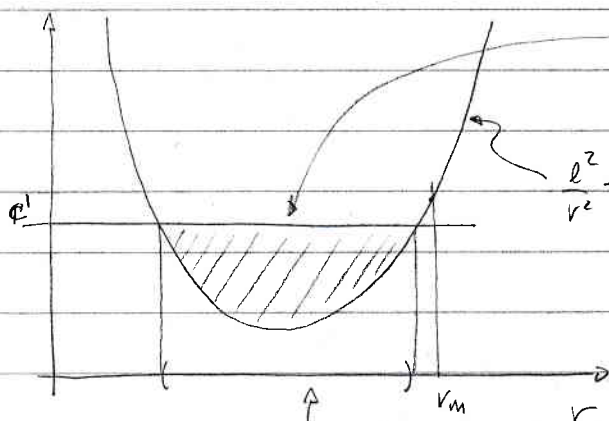
$$\ddot{r} - \frac{\ell^2}{r^3} + \frac{b^2}{4m^2} r = 0$$



(c) Utilizando la ecuación:

$$\dot{r}^2 + \frac{\ell^2}{r^2} + \frac{b^2}{4m^2} r^2 = C'$$

$$\dot{r}^2 = C' - \left(\frac{\ell^2}{r^2} + \frac{b^2}{4m^2} r^2 \right) \geq 0.$$



rango de movimiento

Para que nunca llegue a

$$r_m = 0$$

$$C' < \frac{\ell^2}{r_m^2} + \frac{b^2 r_m^2}{4m^2}$$

C.I.

$$C' = \frac{\ell^2}{r_0^2} + \frac{b^2 r_0^2}{4m^2}$$

$$\frac{\ell^2}{r_0^2} + \frac{b^2 r_0^2}{4m^2} < \frac{\ell^2}{r_m^2} + \frac{b^2 r_m^2}{4m^2}$$

$$\frac{b^2}{4m^2} (r_0^2 - r_m^2) \leq \ell^2 \left(\frac{1}{r_m^2} - \frac{1}{r_0^2} \right)$$

$$r_m^2 r_0^2 \leq \frac{4m^2 \ell^2}{b^2}$$

$$r_m r_0 \leq \frac{2m\ell}{b} = \frac{2m}{b} \left(r_0 v_0 - \frac{b r_0^2}{2m} \right)$$

$$r_m r_0 \leq \frac{2m r_0 v_0}{b} - r_0^2$$

3/7

$$r_m \leq \frac{2m v_0}{b} - r_0$$

Ejercicio 2.-

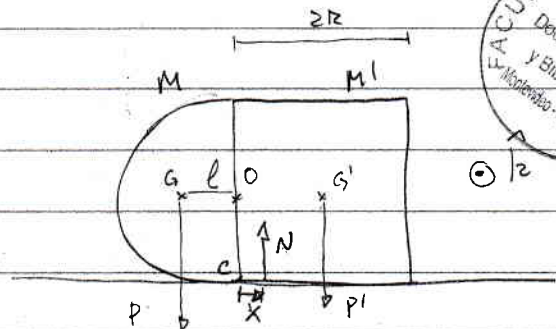
(a)

$$\text{Estabilidad} \Rightarrow \vec{M}_c = 0$$

$$\vec{M}_c \cdot \hat{b} = 0$$

$$Mg l + Nx - M'g R = 0$$

$$l = \frac{4R}{3\pi}$$



$$Nx = M'g R - Mg \frac{4R}{3\pi}$$

Para impedir vuelco en sentido $\hat{k}$ (anti-horario) $\Rightarrow$ debo imponer $x \geq 0$

$$(\text{como además } N > 0) \Rightarrow M' - \frac{4M}{3\pi} \geq 0$$

$$\boxed{\frac{M'}{M} \geq \frac{4}{3\pi}}$$

$$\frac{4}{3\pi} \approx 0.42$$

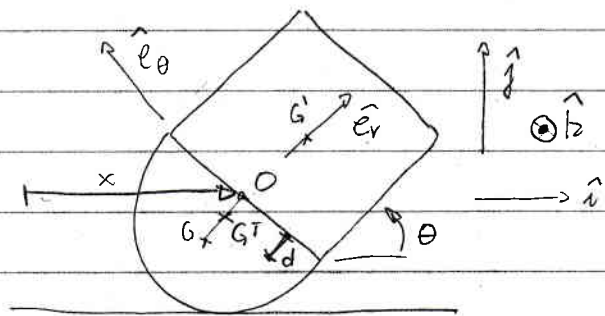
(b) Si $M = 3M' \Rightarrow$ no se cumple la condición de estabilidad.

$$\vec{r} = x \hat{i} - d \hat{e}_r$$

$$\dot{\vec{r}} = \dot{x} \hat{i} - d \dot{\theta} \hat{e}_\theta$$

$$4M'd = M'R - 3M'l$$

$$\boxed{d = R/4 - 3l/4}$$



Observación: Sistema conservativo $\Rightarrow$ la energía mecánica es constante.

K:

$$I_G^T = \left(\frac{M'(2R)^2}{6} + M'(R+d)^2 \right) + \left(\frac{3M'R^2}{2} + 3M'(l-d)^2 \right) =$$

$$= \frac{2}{3} M'R^2 + M'(R+d)^2 + \frac{3}{2} M'R^2 + 3M'(l-d)^2 = \frac{13}{6} M'R^2 + M'(R+d)^2 + 3M'(l-d)^2$$

$$K = \frac{1}{2} (4M') (\dot{x}^2 + d^2 \dot{\theta}^2) + \frac{1}{2} \dot{\theta}^2 I_G^T \quad 4/7$$

$$U = 4M'g \vec{r}_G \cdot \hat{j} = 4M'g (x\hat{i} - d\hat{e}_r) \cdot \hat{j} = -4M'gd \sin\theta.$$



$$E_{mec} = K + U = \phi$$

Además $\sum \vec{F}^{ext} \cdot \hat{i} = 0 \Rightarrow m \vec{a}_G \cdot \hat{i} = 0 \Rightarrow m \vec{v}_G \cdot \hat{i} = 0$

$$\vec{v}_G \cdot \hat{i} = \dot{x} - d\dot{\theta} \sin\theta = \phi$$

Cond. iniciales ($\dot{\theta} = 0, \dot{x} = 0, \theta = \phi$)

$$2M'(\dot{x}^2 + d^2\dot{\theta}^2) + \frac{1}{2}\dot{\theta}^2 I_G^T - 4M'gd \sin\theta = \phi$$

(c) $2M'(d^2\dot{\theta}^2 \sin^2\theta + d^2\dot{\theta}^2) + \frac{1}{2}\dot{\theta}^2 I_G^T - 4M'gd \sin\theta = \phi$

$$\dot{\theta} = \sqrt{\frac{4M'gd \sin\theta}{2M'd^2(1 + \sin^2\theta) + \frac{I_G^T}{2}}}$$

$$\theta = \pi/2$$

$$\dot{\theta} = \sqrt{\frac{4M'gd}{4M'd^2 + I_G^T/2}}$$

S/7



Ejercicio 3 =

(a)

$$I_G^{barras} = \frac{mL^2}{12} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

($\hat{e}_r, \hat{e}_\theta, \hat{e}_\phi$)

$$I_O^{barras} = \frac{mL^2}{12} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} + \frac{mL^2}{4} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} =$$

$$= \frac{mL^2}{3} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$I_O^{Total} = \frac{mL^2}{3} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} + 3mL^2 \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \frac{10mL^2}{3} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\vec{\omega} = -\dot{\theta} \hat{e}_\theta + \dot{\psi} \hat{k} = -\dot{\theta} \hat{e}_\theta - \dot{\psi} \cos\theta \hat{e}_r + \dot{\psi} \sin\theta \hat{e}_\phi$$

$$\vec{L}_O = I_O^{Total} \vec{\omega} = \frac{10mL^2}{3} (-\dot{\theta} \hat{e}_\theta + \dot{\psi} \sin\theta \hat{e}_\phi)$$

(b)

$$\vec{L}_O \cdot \hat{k} = \vec{M}_O^{ext} \cdot \hat{k} = 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{L}_O \cdot \hat{k} = cte$$

$\hat{k} = cte$

$$\vec{L}_O \cdot \hat{k} = \frac{10mL^2}{3} \dot{\psi} \sin^2\theta = cte \quad \Rightarrow \quad \boxed{\dot{\psi} \sin^2\theta = cte}$$

$$\vec{L}_O = \frac{10mL^2}{3} (-\ddot{\theta} \hat{e}_\theta + (\dot{\psi} \sin\theta + \dot{\psi} \dot{\theta} \cos\theta) \hat{e}_\phi + \dot{\theta} \hat{u} + \dot{\psi} \sin\theta (\dot{\psi} \cos\theta \hat{e}_\theta - \dot{\theta} \hat{e}_r))$$

$$\dot{\hat{e}}_\theta = \vec{\omega} \times \hat{e}_\theta = -\dot{\psi} \hat{u}$$

$$\dot{\hat{e}}_\phi = \vec{\omega} \times \hat{e}_\phi = -\dot{\theta} \hat{e}_r + \dot{\psi} \cos\theta \hat{e}_\theta$$

6/7

$$\vec{L}_0 \cdot \hat{e}_\psi = \vec{M}_0^{ext} \cdot \hat{e}_\psi = \left(\beta \dot{\theta} + mg \frac{L}{2} \sin \theta + 3mgL \sin \theta \right)$$

$$\frac{10mL^2}{3} \left(-\ddot{\theta} + \dot{\psi}^2 \sin \theta \cos \theta \right) = \beta \dot{\theta} + \frac{7mgL}{2} \sin \theta$$



(c) $l \dot{\psi} \sin^2 \theta = \bar{l}$

$$\frac{10mL^2}{3} \left(-\ddot{\theta} + \frac{l^2}{\sin^4 \theta} \sin \theta \cos \theta \right) - \beta \ddot{\theta} - \frac{7mgL}{2} \sin \theta = 0$$

$$\ddot{\theta} + \frac{3\beta}{10mL^2} \dot{\theta} + \left(\frac{21}{20} \frac{g}{L} \sin \theta - \frac{l^2 \cos \theta}{\sin^3 \theta} \right) = 0$$

Movimiento circular $\Rightarrow \theta = \theta_0 = \text{cte} \Rightarrow \dot{\theta} = \ddot{\theta} = 0$
 $\dot{\psi} = \dot{\psi}_0 = \text{cte}$

$$\dot{\psi}_0 \sin^2 \theta_0 = l$$

$$\frac{21}{20} \frac{g}{L} \sin \theta_0 - \dot{\psi}_0^2 \sin \theta_0 \cos \theta_0 = 0$$

$$\sin \theta_0 \left(\frac{21}{20} \frac{g}{L} - \dot{\psi}_0^2 \cos \theta_0 \right) = 0$$

$$\cos \theta_0 = \frac{21}{20} \frac{g}{L \dot{\psi}_0^2}$$

$$\text{Radio de giro} = L \sin \theta_0 = L \sqrt{1 - \left(\frac{21}{20} \frac{g}{L \dot{\psi}_0^2} \right)^2}$$

7/7