

Mecánica Newtoniana. Examen: 23/12/2022



Ejercicio 1.

Una masa puntual m se mueve enhebrada en un guía circular lisa (vínculo bilateral) de radio R . La guía rota según un eje $\hat{k}$ perpendicular al plano que contiene a la guía. Un resorte de constante elástica k y longitud natural nula une a la partícula con el eje de giro (ver figura 1). La velocidad angular es $\vec{\omega} = \omega \hat{k}$ con $\omega > 0$ constante. Se sabe que $\frac{k}{m} \neq \omega^2$. En el sistema no actúa el peso.

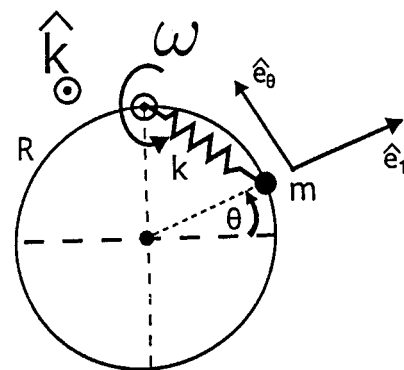


Figura 1:

- Escriba la ecuación de movimiento relativo de la masa m en función de la coordenada θ .
- Determine las posiciones de equilibrio relativo y estudie su estabilidad, según los posibles valores de ω .
- Si ahora se sabe que $\frac{k}{m} < \omega^2$ y en el instante inicial $\theta(0) = 0$ y $\dot{\theta}(0) = \dot{\theta}_0$ ($\dot{\theta}_0 > 0$), determine la condición que debe cumplir $\dot{\theta}_0$ para que la partícula no llegue a $\theta = \frac{\pi}{2}$.

Ejercicio 2.

Una placa rectangular de masa m está apoyada sobre un plano horizontal rugoso de coeficiente de rozamiento estático μ . La placa tiene altura $4a$ y ancho $2a$. Una barra homogénea de igual masa m y longitud $2L$ se mueve bajo la acción del peso girando libremente en torno a uno de sus extremos gracias a una articulación cilíndrica lisa solidaria al bloque y ubicada en el punto medio de su borde superior como muestra la figura 2. Sea θ el ángulo entre la barra y la vertical. Inicialmente la barra se suelta desde el reposo con $\theta = \frac{\pi}{2}$.

Suponiendo que la placa se mantiene estática apoyada sobre el plano:

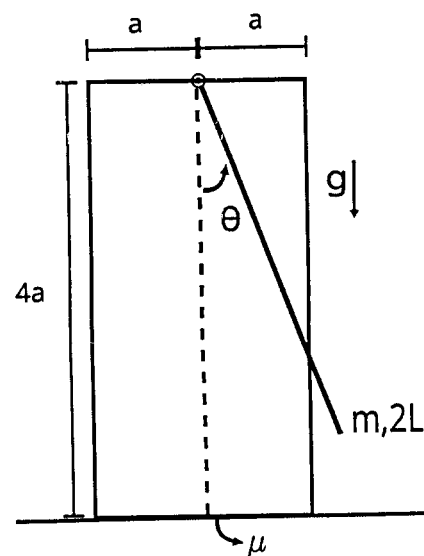


Figura 2:

- Determine la ecuación de movimiento para la barra.
- Escriba las fuerzas reactivas que están aplicadas sobre la barra en el punto de unión con la placa en función de θ y los otros parámetros del sistema.

Ahora estudiaremos el sistema total durante el movimiento de la barra en el rango $\theta \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$:

- Suponiendo que la placa no desliza, encuentre la condición algebraica sobre la coordenada θ para que la placa no vuelque.
- Suponiendo que la placa no vuelca, encuentre la condición algebraica sobre la coordenada θ para que la placa no deslice.

Ejercicio 3.

Una placa rectangular homogénea de aristas de longitud $2a$ y $4a$, y masa m está rígidamente unida por uno de sus vértices O a un eje vertical sin masa solidario a un sistema inercial. La arista OA tiene longitud $2a$ y se encuentra en un plano horizontal definido por los versores $\hat{I}$ y $\hat{J}$. Además, el plano de la placa forma un ángulo α con el eje $\hat{k}$ como muestra la figura 3. El conjunto gira con velocidad angular $\vec{\omega} = \omega \hat{k}$, ω constante.

- Escriba el momento angular de la placa respecto al punto O , $\vec{L}_O$.
- Determine los momentos reactivos sobre la placa en el punto O .

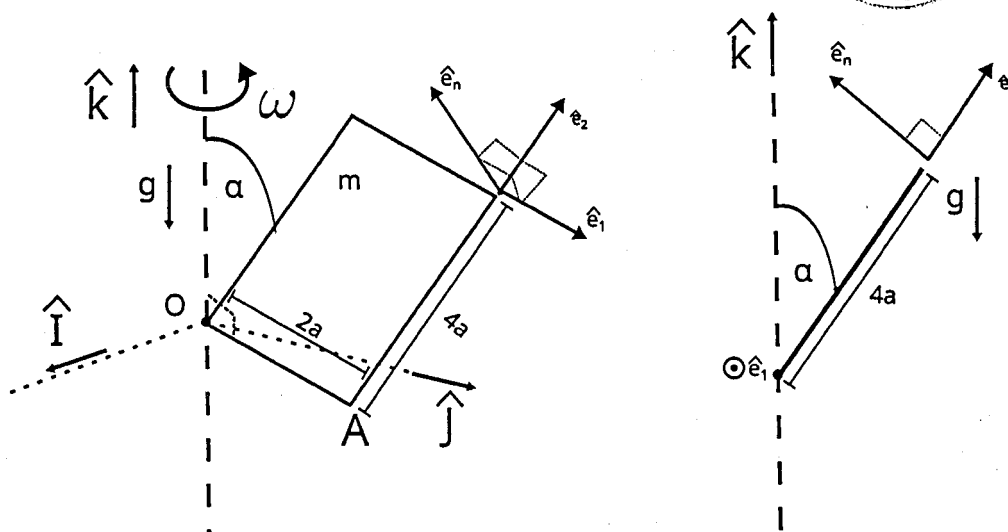
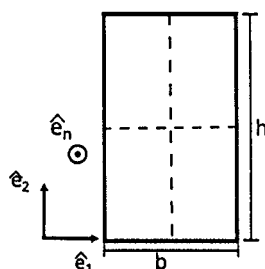
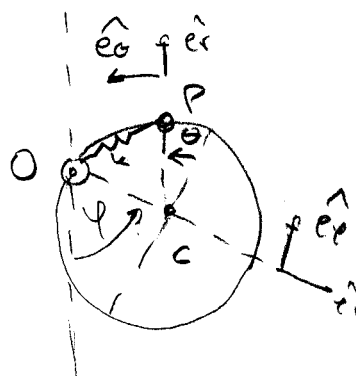
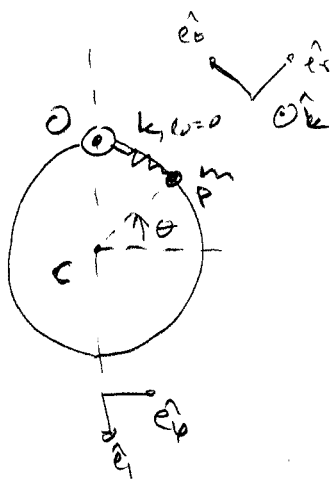


Figura 3:

Nota: El tensor de inercia de la placa rectangular desde el centro de masa en la base $\{\hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_n\}$ es:

$$\mathcal{I}_G = \frac{m}{12} \begin{pmatrix} h^2 & 0 & 0 \\ 0 & b^2 & 0 \\ 0 & 0 & b^2 + h^2 \end{pmatrix}$$





$$\dot{\varphi} = \omega \text{ cte}$$



$$\vec{r} = R(\hat{e}_\theta + \hat{e}_r)$$

$$\vec{v} = R(\dot{\hat{e}}_\theta + \dot{\hat{e}}_r)$$

$$\dot{\hat{e}}_\theta = \dot{\varphi} \hat{k} \wedge \hat{e}_\theta = \dot{\varphi} \hat{e}_r$$

$$\dot{\hat{e}}_r = \dot{\varphi} \hat{k} \wedge \hat{e}_r = -\dot{\varphi} \hat{e}_\theta$$

$$\dot{\hat{e}}_r = (\dot{\varphi} \hat{k} + \ddot{\theta} \hat{k}) \wedge \hat{e}_r = (\dot{\varphi} + \ddot{\theta}) \hat{e}_\theta$$

$$\dot{\hat{e}}_\theta = (\dot{\varphi} + \ddot{\theta}) \hat{k} \wedge \hat{e}_\theta = -(\dot{\varphi} + \ddot{\theta}) \hat{e}_r$$

$$\vec{v} = R(\dot{\varphi} \hat{e}_r + (\dot{\varphi} + \ddot{\theta}) \hat{e}_\theta)$$

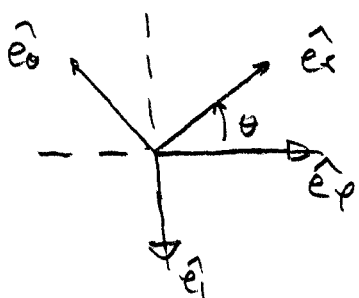
$$\vec{a} = R(\dot{\varphi} \dot{\hat{e}}_r + \ddot{\theta} \hat{e}_\theta + (\dot{\varphi} + \ddot{\theta}) \dot{\hat{e}}_\theta)$$

$$= R(-\dot{\varphi}^2 \hat{e}_\theta + \ddot{\theta} \hat{e}_\theta - (\dot{\varphi} + \ddot{\theta})^2 \hat{e}_r)$$

$$\vec{F}_N = -N \hat{e}_r + \vec{F}_{el}$$

$$\vec{F}_{el} = -k(\vec{r}_P - \vec{r}_O)$$

$$= -kR(\hat{e}_\theta + \hat{e}_r)$$



$$\hat{e}_\varphi = \cos \theta \hat{e}_r - \sin \theta \hat{e}_\theta$$

$$\hat{e}_\theta = -\cos \theta \hat{e}_\theta - \sin \theta \hat{e}_r$$

$$\vec{F}_N = -N \hat{e}_r - kR(-\cos \theta \hat{e}_\theta + (1 - \sin \theta) \hat{e}_r)$$

$$\vec{a} = R(\ddot{\theta} \hat{e}_\theta - \dot{\varphi}^2 \hat{e}_\theta - (\dot{\varphi} + \ddot{\theta})^2 \hat{e}_r)$$

$$\vec{F}_N = m \vec{a} \quad \text{según } \hat{e}_\theta$$

$$kR \cos \theta = mR[\ddot{\theta} + \dot{\varphi}^2 \cos \theta] \rightarrow$$

$$\boxed{\ddot{\theta} + \left(\omega^2 - \frac{k}{m}\right) \cos \theta = 0} \quad \text{Ec. de mov.}$$

b) Puntos de eq.

$$\text{ceros de } f(\theta) = \left(\omega^2 - \frac{k}{m}\right) \cos \theta$$

$$\rightarrow \cos \theta = 0 \rightarrow \theta_1 = \frac{\pi}{2}$$

pues $\omega^2 \neq \frac{k}{m}$

$$\theta_2 = -\frac{\pi}{2}$$

$$\left. \frac{df}{d\theta} \right|_{\theta_{eq}} > 0 \text{ estables.}$$

$$\frac{df}{d\theta} = -\left(\omega^2 - \frac{k}{m}\right) \sin \theta$$

$$\theta_1 = \frac{\pi}{2} \quad \left. \frac{df}{d\theta} \right|_{\theta_1} = -\left(\omega^2 - \frac{k}{m}\right) > 0 \text{ si } \omega^2 < \frac{k}{m} \rightarrow \text{es estable.}$$

< 0 si $\omega^2 > \frac{k}{m}$ es inestable.

$$\theta_2 = -\frac{\pi}{2} \quad \left. \frac{df}{d\theta} \right|_{\theta_2} = -\left(\omega^2 - \frac{k}{m}\right)(-1) < 0 \text{ si } \omega^2 < \frac{k}{m} \text{ es inestable.}$$

> 0 si $\omega^2 > \frac{k}{m}$ es estable.

c) en $t=0$ $\theta_0 = 0$ y $\dot{\theta}(0) = \dot{\theta}_0 > 0$ y $\omega^2 > \frac{k}{m}$

$$\text{preintegrando} \quad \frac{\ddot{\theta}^2}{2} - \frac{\dot{\theta}_0^2}{2} = -\left(\omega^2 - \frac{k}{m}\right) \sin \theta \Big|_{\theta_0}^{\theta}$$

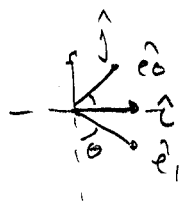
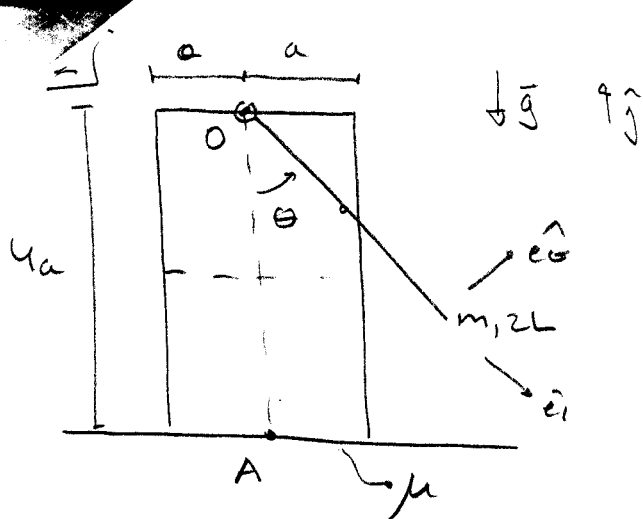
$$\frac{\dot{\theta}^2}{2} = \frac{\dot{\theta}_0^2}{2} - \left(\omega^2 - \frac{k}{m}\right) \sin \theta$$

para que no llegue a $\theta = \frac{\pi}{2}$ θ_0 t.q $\dot{\theta}(\theta_2) = 0$ debe ocurrir con $\theta_2 < \frac{\pi}{2}$

$$0 = \frac{\dot{\theta}_0^2}{2} - \left(\omega^2 - \frac{k}{m}\right) \sin \theta_2 \rightarrow \sin \theta_2 = \frac{\dot{\theta}_0^2}{2\left(\omega^2 - \frac{k}{m}\right)} < 1 \rightarrow \boxed{\theta_0^2 < 2\left(\omega^2 - \frac{k}{m}\right)}$$

4/9

pues $\sin(\pi/2) = 1$



$$\hat{j} = -\cos\theta \hat{e}_1 + \sin\theta \hat{e}_2$$

$$\hat{e}_1 = \sin\theta \hat{e}_2 - \cos\theta \hat{j}$$

$$\hat{e}_2 = \cos\theta \hat{e}_1 + \sin\theta \hat{j}$$

a) 2da cardinal = 0 para la barra. En O articulación cilíndrica lisa

$$\vec{M}_O = -mgL \sin\theta \hat{k}$$

$$\mathbb{I}_O^{(\hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{k})} = \frac{4}{3}mL^2 \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\vec{L}_O = \mathbb{I}_O \vec{\omega}$$

$$\vec{\omega} = \dot{\theta} \hat{k}$$

$$\vec{L}_O = \frac{4}{3}mL^2 \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta} \end{pmatrix}$$

$$\vec{L}_O = \frac{4}{3}mL^2 \dot{\theta} \hat{k}$$

$$\Rightarrow \frac{4}{3}mL^2 \ddot{\theta} = -mgL \sin\theta \rightarrow \ddot{\theta} = -\frac{3}{4} \frac{g}{L} \sin\theta$$

a. $t=0$ $\theta(0) = \frac{\pi}{2}$ y $\dot{\theta}(0) = 0$ - preintegrados.

$$\frac{\dot{\theta}^2}{2} - \frac{\dot{\theta}_0^2}{2} = \frac{3}{4} \frac{g}{L} \cos\theta \Big|_{\theta_0}^{\theta} \rightarrow \dot{\theta}^2 = \frac{3}{2} \frac{g}{L} \cos\theta$$

b) 1ra cardinal barra.

$$\vec{r}_a = L \hat{e}_1, \quad \vec{v}_a = L \dot{\theta} \hat{e}_2, \quad \vec{a}_a = L \ddot{\theta} \hat{e}_2 - L \dot{\theta}^2 \hat{e}_1$$

$$\vec{F}_a = -R_1 \hat{e}_1 + R_2 \hat{e}_2 - mg \hat{j} = (mg \cos\theta - R_1) \hat{e}_1 + (R_2 - mg \sin\theta) \hat{e}_2$$

$$mL\ddot{\theta} = R_2 - mg \sin \theta$$

$$-mL\dot{\theta}^2 = mg \cos \theta + R_1$$

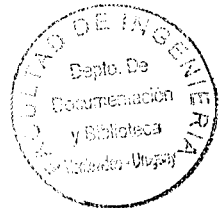
Sustituyo $\ddot{\theta}$ y $\dot{\theta}^2$

$$R_2 = mL\ddot{\theta} + mg \sin \theta = -\frac{3mg \sin \theta}{4} + mg \sin \theta$$

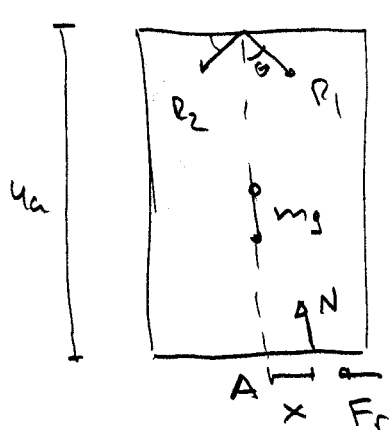
$$R_2 = \frac{1}{4} mg \sin \theta$$

$$R_1 = mg \cos \theta + mL\dot{\theta}^2 = mg \cos \theta \left(1 + \frac{3}{2}\right)$$

$$R_1 = \frac{5}{2} mg \cos \theta$$



c) Placa (Mientras no desliza)



1ra cardinal

$$\vec{F}_N = 0 = (N - mg)\hat{j} + R_1\hat{e}_1 - R_2\hat{e}_2 - F_r\hat{e}_3 = 0$$

$$(N - mg)\hat{j} + R_1(\sin \theta \hat{e}_3 - \cos \theta \hat{j}) - R_2(\cos \theta \hat{e}_3 + \sin \theta \hat{j}) - F_r \hat{e}_3 = 0$$

$$\rightarrow N - mg - R_1 \cos \theta - R_2 \sin \theta = 0$$

$$R_1 \sin \theta - R_2 \cos \theta - F_r = 0$$

$$N = mg + R_1 \cos \theta + R_2 \sin \theta = mg + \frac{5}{2} mg \cos^2 \theta + \frac{1}{4} mg \sin^2 \theta$$

$$N = mg \left(1 + \frac{1}{4} + \frac{9}{4} \cos^2 \theta\right) \rightarrow N = \frac{mg}{4} (5 + 9 \cos^2 \theta)$$

cardinal en A:

$$N_x \hat{k} + 4a(R_2 \cos \theta - R_1 \sin \theta) = 0$$

$$x = 4a \frac{(R_1 \sin \theta - R_2 \cos \theta)}{\frac{mg}{4}(5 + 9 \cos^2 \theta)}$$

$$x = 4a \frac{\left(\frac{5}{2} mg \sin \theta \cos \theta - \frac{1}{4} mg \sin \theta \cos \theta\right)}{\frac{mg}{4}(5 + 9 \cos^2 \theta)}$$



$$x = \frac{4a \cdot 9 \sin \theta \cos \theta}{5 + 9 \cos^2 \theta} \rightarrow x = \frac{36 a \sin \theta \cos \theta}{5 + 9 \cos^2 \theta}$$

No vuelco $-a \leq x \leq a$

para $\theta \in [0, \frac{\pi}{2}]$ $\sin \theta > 0$ $\cos \theta > 0 \rightarrow \frac{36 a \sin \theta \cos \theta}{5 + 9 \cos^2 \theta} < a$

para $\theta \in [-\frac{\pi}{2}, 0]$ $\sin \theta < 0$ $\cos \theta > 0 \rightarrow -a < \frac{36 a \sin \theta \cos \theta}{5 + 9 \cos^2 \theta}$

Otra forma $|x| \leq a \rightarrow \frac{36 a |\sin \theta| \cos \theta}{5 + 9 \cos^2 \theta} < a$

d) No desliza.

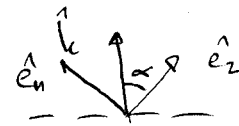
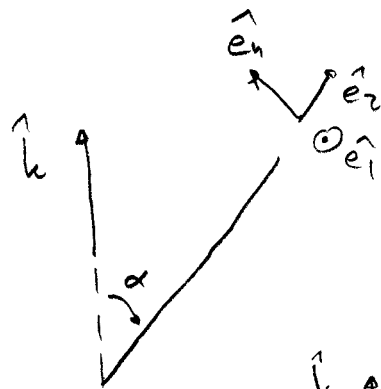
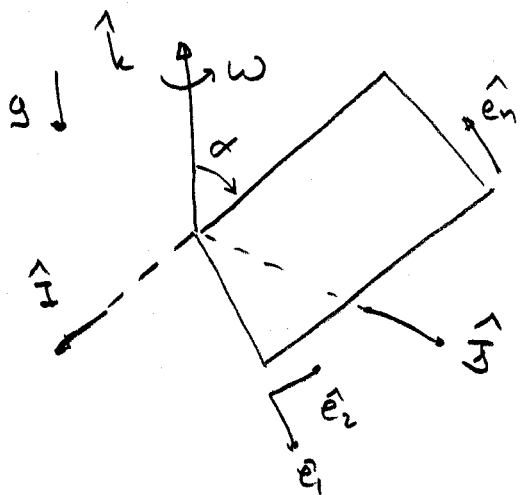
$$F_r = R_1 \sin \theta - R_2 \cos \theta = \frac{5}{2} mg \cos \theta \sin \theta - \frac{1}{4} mg \sin \theta \cos \theta$$

$$F_r = mg \frac{9}{4} \sin \theta \cos \theta$$

$$|F_r| \leq \mu |N| \rightarrow \frac{9}{4} mg |\sin \theta \cos \theta| \leq \mu \frac{mg}{4} (5 + 9 \cos^2 \theta)$$

$$\frac{9 |\sin \theta| \cos \theta}{5 + 9 \cos^2 \theta} \leq \mu$$

3



$$\hat{k} = \cos \alpha \hat{e}_2 + \sin \alpha \hat{e}_n$$

a) $\vec{L}_0 = \mathbb{I}_0 \vec{\omega}$ $\vec{\omega} = \omega \hat{k} = \omega \cos \alpha \hat{e}_2 + \omega \sin \alpha \hat{e}_n$

$$\mathbb{I}_0 = \mathbb{I}_G + \mathbb{J}_0^{M,G}$$

$$\mathbb{I}_G \{ \hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_n \} = \frac{m}{12} \begin{pmatrix} h^2 & 0 & 0 \\ 0 & b^2 & 0 \\ 0 & 0 & h^2 + b^2 \end{pmatrix}$$

$$\mathbb{I}_G = \frac{m}{12} \begin{pmatrix} 16a^2 & 0 & 0 \\ 0 & 4a^2 & 0 \\ 0 & 0 & 20a^2 \end{pmatrix}$$

$$b = 2a$$

$$h = 4a$$



$$\vec{r}_G - \vec{r}_0 = a \hat{e}_1 + 2a \hat{e}_2$$

$$\mathbb{J}_0^{M,G} = m a^2 \begin{pmatrix} 4 & -2 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\mathbb{I}_0 = m a^2 \begin{pmatrix} \frac{4}{3} + 4 & -2 & 0 \\ -2 & \frac{1}{3} + 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{20}{3} + 5 \end{pmatrix} = m a^2 \begin{pmatrix} \frac{16}{3} & -2 & 0 \\ -2 & \frac{4}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{20}{3} \end{pmatrix}$$

$$\vec{L}_0 = m a^2 \begin{pmatrix} \frac{16}{3} & -2 & 0 \\ -2 & \frac{4}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{20}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega \cos \alpha \\ \omega \sin \alpha \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\vec{L}_0 = m a^2 \left(-2\omega \cos \alpha \hat{e}_1 + \frac{4}{3} \omega \cos \alpha \hat{e}_2 + \frac{20}{3} \omega \sin \alpha \hat{e}_n \right) \quad 3.2$$

$$b) \vec{L}_0 = \vec{M}_0^{(ext)} \quad \vec{M}_0^{(ext)} = \vec{r}_G \wedge (-mg\hat{k}) + \vec{M}_0^{react}$$



$$\vec{r}_G = a \hat{e}_1 + 2a \hat{e}_2 \rightarrow \vec{M}_0^{(ext)} = a(\hat{e}_1 + 2\hat{e}_2) \wedge (-mg(\cos \alpha \hat{e}_2 + \sin \alpha \hat{e}_n)) + \vec{M}_0^{react}$$

$$\vec{M}_0^{(ext)} = mga(-\cos \alpha \hat{e}_n + \sin \alpha \hat{e}_2 - 2 \sin \alpha \hat{e}_1) + M_1 \hat{e}_1 + M_2 \hat{e}_2$$

$$\text{tomo } \vec{M}_0^{react} = M_1 \hat{e}_1 + M_2 \hat{e}_2 + M_3 \hat{e}_n$$

$$\dot{\vec{L}}_0 = m a^2 \left(-2\dot{\omega} \cos \alpha \hat{e}_1 + \frac{4}{3} \dot{\omega} \cos \alpha \hat{e}_2 + \frac{20}{3} \dot{\omega} \sin \alpha \hat{e}_n \right)$$

$$\dot{\hat{e}}_1 = \vec{\omega} \wedge \hat{e}_1 = \omega(\cos \alpha \hat{e}_2 + \sin \alpha \hat{e}_n) \wedge \hat{e}_1 = -\omega \cos \alpha \hat{e}_n + \omega \sin \alpha \hat{e}_2$$

$$\dot{\hat{e}}_2 = \vec{\omega} \wedge \hat{e}_2 = \omega(\cos \alpha \hat{e}_2 + \sin \alpha \hat{e}_n) \wedge \hat{e}_2 = -\omega \sin \alpha \hat{e}_1$$

$$\dot{\hat{e}}_n = \vec{\omega} \wedge \hat{e}_n = \omega(\cos \alpha \hat{e}_2 + \sin \alpha \hat{e}_n) \wedge \hat{e}_n = \omega \cos \alpha \hat{e}_1$$

$$\dot{\vec{L}}_0 = m a^2 \left(-2\omega \cos \alpha (-\omega \cos \alpha \hat{e}_n + \omega \sin \alpha \hat{e}_2) - \frac{4}{3} \omega^2 \cos \alpha \sin \alpha \hat{e}_1 + \frac{20}{3} \omega^2 \sin \alpha \cos \alpha \hat{e}_1 \right)$$

$$\rightarrow m a^2 \omega^2 \frac{16}{3} \cos \alpha \sin \alpha = -2mga \sin \alpha + M_1$$

$$\rightarrow m a^2 \omega^2 2 \sin \alpha \cos \alpha = mga \sin \alpha + M_2$$

$$\rightarrow 2m a^2 \omega^2 \cos^2 \alpha = -mga \cos \alpha + M_3$$