

Mecánica Newtoniana. Examen: 16/02/2023



Ejercicio 1.

Una masa puntual m se mueve enhebrada en un guía con forma de aro circular liso (**vínculo bilateral**) de masa despreciable y radio R . La **guía rota libremente según un eje $\hat{k}$ tangente a la guía** por el punto O (ver figura 1). Se estudiará el sistema conformado por la guía + la partícula. Se sabe que en $t = 0$: $\dot{\varphi}(0) = \dot{\varphi}_0$ con $\dot{\varphi}_0 > 0$, $\dot{\theta}(0) = 0$ y $\theta(0) = 0$.

- Calcule el momento angular del sistema respecto al punto O , $\vec{L}_O$.
- Identifique las cantidades conservadas, justifique su conservación y calcúlelas en función de los datos del problema y de las coordenadas elegidas.
- Obtenga una ecuación del tipo $\dot{\theta}^2 = f(\theta)$.

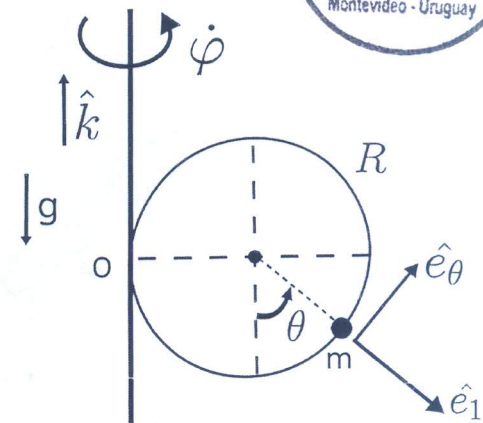


Figura 1:

El rígido de la figura 2 está compuesto por un disco de masa despreciable y radio R que contiene una masa puntual m incrustada (soldada) en su borde. Este rígido está apoyado sobre una placa horizontal rugosa de coeficiente de rozamiento estático μ . La placa horizontal se mueve en la dirección $\hat{i}$ con aceleración $\vec{a} = a\hat{i}$ (a constante) respecto a un sistema de referencia inercial, como muestra la figura 2.

Suponiendo que el rígido compuesto rueda sin deslizar sobre la placa y definiendo la coordenada x' con origen en O' en el sistema solidario a la placa (ver figura 2):

- Obtenga la aceleración absoluta del centro de masas del rígido compuesto.
- Escriba la ecuación de movimiento del rígido compuesto para la coordenada θ .
- Encuentre las condiciones que debe verificar a y μ para que el rígido se encuentre en equilibrio relativo sobre el plano en $\theta = \frac{\pi}{4}$.

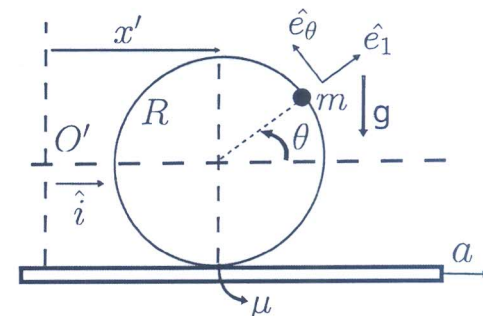


Figura 2:

Ejercicio 3.

Una placa rectangular homogénea de aristas de longitud $2a$ y $4a$, y masa m está unida por el punto O de una de sus aristas horizontales de largo $4a$ a un eje vertical $\hat{k}$. La unión se logra mediante **una articulación cilíndrica lisa de eje $\hat{e}_1$** . Sea θ al ángulo entre la placa y el eje $\hat{k}$, como muestra la figura 3. La articulación en O gira con velocidad angular $\vec{\omega} = \omega\hat{k}$, con ω constante.

- Calcule el momento angular de la placa respecto al punto O , $\vec{L}_O$.
- Obtenga la ecuación de movimiento de la placa en función de la coordenada θ .
- Encuentre los puntos de equilibrio relativo de la placa y estudie su estabilidad en función de los parámetros del sistema.

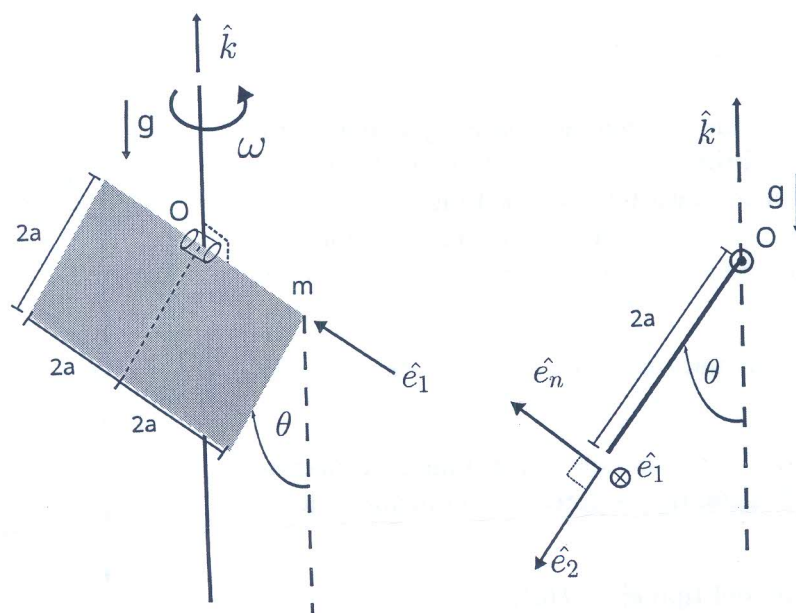
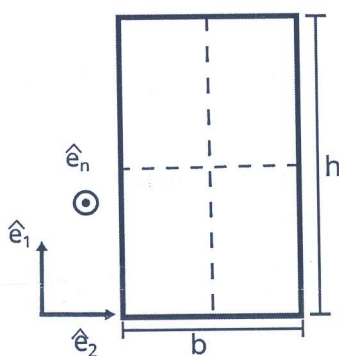
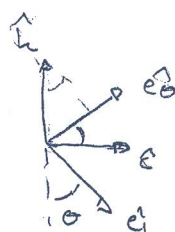
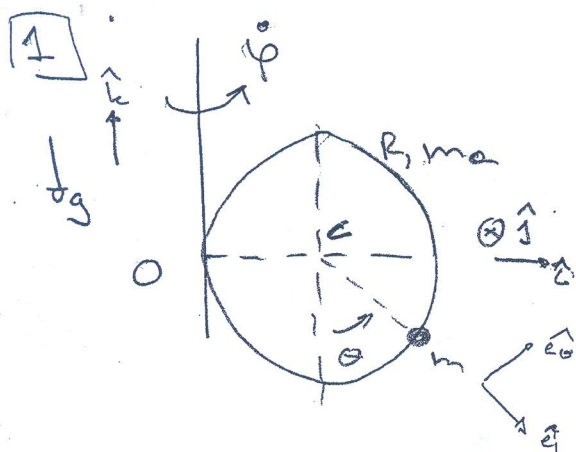


Figura 3:

Nota: El tensor de inercia de la placa rectangular desde el centro de masa en la base $\{\hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_n\}$ es:

$$\mathcal{I}_G = \frac{m}{12} \begin{pmatrix} b^2 & 0 & 0 \\ 0 & h^2 & 0 \\ 0 & 0 & b^2 + h^2 \end{pmatrix}$$





$$\hat{k} = -\cos\theta \hat{e}_1 + \sin\theta \hat{e}_2$$

$$\hat{e}_2 = \sin\theta \hat{e}_1 + \cos\theta \hat{k}$$



$$a) \vec{L}_O^T = \vec{L}_O^A + \vec{L}_O^m$$

$$\text{masa} \quad \vec{r} = R\hat{e}_2 + R\hat{e}_1$$

$$\vec{v}_P = R\dot{\hat{e}}_2 + R\dot{\hat{e}}_1$$

$$\vec{v}_P = R\dot{\varphi} \hat{j} + R(\dot{\varphi} \sin\theta \hat{j} + \dot{\theta} \hat{e}_2)$$

$$\dot{\hat{e}}_2 = \dot{\varphi} \hat{k} \wedge \hat{e}_2 = \dot{\varphi} \hat{j}$$

$$\dot{\hat{j}} = \dot{\varphi} \hat{k} \wedge \hat{j} = -\dot{\varphi} \hat{e}_2$$

$$\dot{\hat{e}}_1 = (\dot{\varphi} \hat{k} - \dot{\theta} \hat{j}) \wedge \hat{e}_1 = \dot{\varphi} \sin\theta \hat{j} - \dot{\theta} (-\hat{e}_2)$$

$$\dot{\hat{e}}_1 = \dot{\varphi} \sin\theta \hat{j} + \dot{\theta} \hat{e}_2$$

$$\dot{\hat{e}}_2 = (\dot{\varphi} \hat{k} - \dot{\theta} \hat{j}) \wedge \hat{e}_2 = -\dot{\varphi} \cos\theta (-\hat{j}) - \dot{\theta} \hat{k}$$

$$\vec{L}_O^m = \vec{r} \wedge m \vec{v}_P$$

$$= (R\hat{e}_2 + R\hat{e}_1) \wedge m \left[R\dot{\varphi} (1 + \sin\theta) \hat{j} + R\dot{\theta} \hat{e}_2 \right]$$

$$= mR^2 \left(\dot{\varphi} (1 + \sin\theta) \hat{k} + mR^2 \dot{\theta} \sin\theta (-\hat{j}) + mR^2 \dot{\varphi} (1 + \sin\theta) \hat{e}_2 - mR^2 \dot{\theta} \hat{j} \right)$$

$$= mR^2 \left[\dot{\varphi} (1 + \sin\theta) \hat{k} - \dot{\theta} (1 + \sin\theta) \hat{j} + \dot{\varphi} (1 + \sin\theta) \hat{e}_2 \right]$$

$$\text{ARO} \quad \Pi_C^{\{\hat{e}_1, \hat{j}, \hat{k}\}} = m_a R^2 \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$\Pi_O = \Pi_C + \Pi_P^{(M,C)}$$

$$\vec{r}_C - \vec{r}_O = R\hat{e}_2$$

$$\Pi_P^{MA} = m_a R^2 \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Pi_O = m_a R^2 \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{3}{2} \end{pmatrix}$$

$$\vec{L}_O^A = \Pi_O \vec{\omega}_A \quad \vec{\omega}_A = \dot{\varphi} \hat{k} \Rightarrow \vec{L}_O^A = \frac{3}{2} m_a R^2 \dot{\varphi} \hat{k}$$

$$\Rightarrow \vec{L}_0 = R^2 \left[\left(m(1+\sin\theta) \dot{\varphi} + \frac{3}{2} m_a \dot{\varphi} \right) \hat{k} - m\dot{\theta}(1+\sin\theta) \hat{j} + m\dot{\varphi}(1+\sin\theta) \hat{e}_\theta \right]$$

$$b) \vec{M}_0^{\text{ext}} = R\hat{e}_\theta \wedge (-mg\hat{k}) + (R\hat{e}_\theta + R\hat{e}_\theta) \wedge (-mg\hat{k}) + \underbrace{M_1^{\text{react}} \hat{e}_\theta + M_2^{\text{react}} \hat{j}}_{\text{grro Libre según } \hat{k}}$$

Ya que las Fuerzas entre la masa y el Aro forman un par de acción y reacción y se cancelan mutuamente.

De otra forma, son internas al sistema. total.

$$\vec{M}_0^{\text{ext}} = mgR\hat{j} + mgR\hat{j} + mgR\sin\theta\hat{j} + \overbrace{M_1^{\text{react}}\hat{e}_\theta + M_2^{\text{react}}\hat{j}}^{\text{grro Libre según } \hat{k}}$$

$$\Rightarrow \vec{M}_0^{\text{ext}} \cdot \hat{k} = 0 \rightarrow \frac{d\vec{L}_0}{dt} \cdot \hat{k} = \vec{M}_0^{\text{ext}} \cdot \hat{k} = 0$$

$$\frac{d(\vec{L}_0 \cdot \hat{k})}{dt} = \frac{d\vec{L}_0}{dt} \cdot \hat{k} + \vec{L}_0 \cdot \frac{d\hat{k}}{dt} \stackrel{\hat{k} \text{ es fijo}}{=} \frac{d\vec{L}_0}{dt} \cdot \hat{k} \rightarrow \frac{d(\vec{L}_0 \cdot \hat{k})}{dt} = 0$$

$$\Rightarrow \vec{L}_0 \cdot \hat{k} = L_z \text{ cte.}$$

$$L_z = R^2 \left(m(1+\sin\theta) \dot{\varphi} + \frac{3}{2} m_a \dot{\varphi} \right) + R^2 m \dot{\varphi} (1+\sin\theta) \hat{e}_\theta \cdot \hat{k} \quad \sin\theta$$

$$L_z = R^2 \left(m \dot{\varphi} (1+\sin\theta)^2 + \frac{3}{2} m_a \dot{\varphi} \right)$$



$$\text{Ahora } m_a \rightarrow 0 \Rightarrow L_z = m R^2 \dot{\varphi} (1+\sin\theta)^2$$

c) Fuerzas conservativas: Peso

$$\frac{dE}{dt} = P^{\text{res}} \quad P^{\text{res}} = P_{\text{Normal}} \quad \text{aro}$$

tengo fuerzas Normales actuando sobre el Aro ($\vec{N}_A$) y sobre la partícula ($\vec{N}_p$) por acción y reacción $\vec{N}_A = -\vec{N}_p$

$$\Rightarrow P_{\text{Normal}} = \vec{N}_A \cdot \vec{v}_A + \vec{N}_p \cdot \vec{v}_p$$

$$\vec{v}_p = \vec{v}' + \vec{v}_T \text{ (Roverbd)} \text{ y } \vec{v}_T = \vec{v}_A$$

$$\rightarrow P_{\text{Normal}} = \vec{N}_A \cdot (\vec{v}_A - \vec{v}' - \vec{v}_A) = \vec{N}_A \cdot \vec{v}' = 0 \rightarrow P^{\text{res}} = 0 \text{ E cte}$$

0 pues $m_a \rightarrow 0$

$$T = \frac{1}{2} m \vec{v}_p^2 + \frac{1}{2} \vec{\omega}_A \cdot \mathbb{I}_O \vec{\omega}_A \rightarrow T = \frac{1}{2} m \vec{v}_p^2$$

$$U_g = -mgR \cos\theta$$

$$\vec{v}_p = R(1+\sin\theta)\hat{j} + R\dot{\theta}\hat{e}_\theta$$

$$T = \frac{1}{2} m R^2 (1+\sin\theta)^2 \dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2} m R^2 \dot{\theta}^2$$

$$E = E_0 = \frac{1}{2} m R^2 \left(\dot{\theta}^2 + \dot{\varphi}^2 (1 + \sin \theta)^2 \right) - mg R \cos \theta$$

$$E_0 = \frac{1}{2} m R^2 \dot{\varphi}_0^2 - mg R$$

de la conservación de L_z :

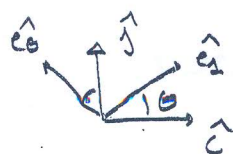
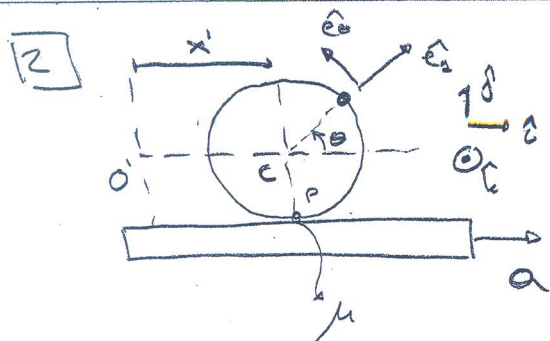
$$L_z = m R^2 \dot{\varphi} (1 + \sin \theta)^2 \quad \rightarrow \quad L_z = m R^2 \dot{\varphi}_0$$

$$\rightarrow \dot{\varphi} = \frac{\dot{\varphi}_0}{(1 + \sin \theta)^2}$$

$$d) \quad E_0 = \frac{1}{2} m R^2 \left(\dot{\theta}^2 + \frac{\dot{\varphi}_0^2}{(1 + \sin \theta)^4} (1 + \sin \theta)^2 \right) - mg R \cos \theta = \frac{1}{2} m R^2 \dot{\varphi}_0^2 - mg R$$

$$\dot{\theta}^2 = \dot{\varphi}_0^2 \left(1 - \frac{1}{(1 + \sin \theta)^2} \right) + \frac{g}{R} (\cos \theta - 1)$$





$$\hat{e}_1 = \cos \theta \hat{i} + \sin \theta \hat{j}$$

$$\hat{e}_2 = -\sin \theta \hat{i} + \cos \theta \hat{j}$$

- a) El centro de masa del rígido coincide con la partícula (el disco tiene masa despreciable)

$$\vec{r}_G = \vec{r}_C + R \hat{e}_1$$

$$\text{con } \vec{r}_C = \vec{r}_{O'} + x' \hat{i}$$

$$\dot{\hat{e}}_1 = \vec{\omega} \wedge \hat{e}_1 = \dot{\theta} \hat{k} \wedge \hat{e}_1 = \dot{\theta} \hat{e}_2$$

$$\dot{\hat{e}}_2 = \vec{\omega} \wedge \hat{e}_2 = \dot{\theta} \hat{k} \wedge \hat{e}_2 = -\dot{\theta} \hat{e}_1$$

$$\vec{v}_G = \vec{v}_C + R \dot{\hat{e}}_1 = \vec{v}_{O'} + \dot{x}' \hat{i} + R \dot{\theta} \hat{e}_2$$

$$\vec{a}_G = \vec{a}_{O'} + \ddot{x}' \hat{i} + R \ddot{\theta} \hat{e}_2 + R \dot{\theta} \dot{\hat{e}}_2 \quad \text{O' es solidario a la placa} \Rightarrow \vec{a}_{O'} = a \hat{i}$$

$$\vec{a}_G = a \hat{i} + \ddot{x}' \hat{i} + R \ddot{\theta} \hat{e}_2 - R \dot{\theta}^2 \hat{e}_1$$

RSD $\vec{v}_P = 0$ (en el sistema solidario a la placa)

Dist

velocidades $\vec{v}_P = \vec{v}_C + \vec{\omega} \wedge (\vec{r}_P - \vec{r}_C) \quad \vec{r}_P - \vec{r}_C = -R \hat{j}$

$$\vec{v}_P = \dot{x}' \hat{i} + \dot{\theta} \hat{k} \wedge (-R \hat{j}) = (\dot{x}' + R \dot{\theta}) \hat{i} = 0 \Rightarrow \dot{x}' = -R \dot{\theta}$$

$$\downarrow$$

$$\dot{x}' = -R \dot{\theta}$$

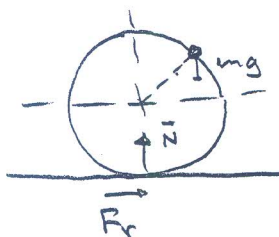
En el sistema absoluto, $\vec{v}_P = \vec{v}_{O'}$ punto de la placa
Dist velocidades

$$\vec{v}_P = \vec{v}_C + \dot{\theta} \hat{k} \wedge (-R \hat{j}) \quad \vec{v}_C = \vec{v}_{O'} + \dot{x}' \hat{i}$$

$$\Rightarrow \vec{v}_P = \vec{v}_{O'} + \dot{x}' \hat{i} + R \dot{\theta} \hat{i} = \vec{v}_{O'} \Rightarrow \dot{x}' = -R \dot{\theta} \text{ mismo resultado}$$

$$\vec{a}_G = a \hat{i} - R \ddot{\theta} \hat{i} + R \ddot{\theta} \hat{e}_2 - R \dot{\theta}^2 \hat{e}_1$$

b)



1ª Cardinal $m \vec{a}_G = N \hat{j} + F_r \hat{i} - mg \hat{j}$

$$\vec{a}_G = a\hat{e} - R\ddot{\theta}\hat{e} + R\ddot{\theta}(-\sin\theta\hat{e} + \cos\theta\hat{j}) - R\dot{\theta}^2(\cos\theta\hat{e} + \sin\theta\hat{j})$$

1^{ra} cardinal i) $m(a - R\ddot{\theta}(1 + \sin\theta) - R\dot{\theta}^2\cos\theta) = F_r$ (1)

j) $mR(\ddot{\theta}\cos\theta - \dot{\theta}^2\sin\theta) = N - mg$ (2)

2^{da} Cardinal en C (C tiene aceleración)

$$\vec{L}_C = m(\vec{r}_G - \vec{r}_C) \wedge \vec{v}_C + \mathbb{I}_C \vec{\omega}$$

$$\vec{r}_G - \vec{r}_C = R\hat{e}_1 = R\cos\theta\hat{e} + R\sin\theta\hat{j}$$

$$\vec{v}_C = \vec{v}_O + \dot{\chi}'\hat{e} \quad \vec{a}_C = \vec{a}_O + \ddot{\chi}'\hat{e} = a\hat{e} + \ddot{\chi}'\hat{e}$$

$$\frac{d\vec{L}_C}{dt} = m(\vec{v}_G - \vec{v}_C) \wedge \vec{v}_C + m(\vec{r}_G - \vec{r}_C) \wedge \vec{a}_C + \mathbb{I}_C \dot{\vec{\omega}}$$

La 2^{da} cardinal: $\frac{d\vec{L}_C}{dt} = m\vec{v}_G \wedge \vec{v}_C + \vec{M}_C^{(ext)}$

Juntando ambas: $m(\vec{r}_G - \vec{r}_C) \wedge \vec{a}_C + \mathbb{I}_C \dot{\vec{\omega}} = \vec{M}_C^{ext}$

$$m(\vec{r}_G - \vec{r}_C) \wedge \vec{a}_C = -mR\sin\theta(a + \ddot{\chi}')\hat{k}$$

$$\mathbb{I}_C \{\hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{k}\} = mR^2 \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\vec{\omega} = \dot{\theta}\hat{k} \quad \dot{\vec{\omega}} = \ddot{\theta}\hat{k}$$

$$\Rightarrow \vec{M}_C^{ext} = (mR^2\ddot{\theta} - mR(a + \ddot{\chi}')\sin\theta)\hat{k}$$

de la dinámica

$$\vec{M}_C^{ext} = -mgR\cos\theta\hat{k} + F_r R\hat{k}$$

$$\Rightarrow mR^2\ddot{\theta} - mR(a + \ddot{\chi}')\sin\theta = RF_r - mgR\cos\theta \quad (3)$$



Sustituyendo F_r de (1) en (3)

$$mR(R\ddot{\theta} - (a + \ddot{x}')\sin\theta) = mR(a - R\ddot{\theta}(1 + \sin\theta) - R\dot{\theta}^2\cos\theta - g\cos\theta)$$

sustituyo $\ddot{x}' = -R\ddot{\theta}$

Ecuación de movimiento.

c) En eq. relativo $\dot{x}' = 0$ $\dot{\theta}' = 0$ $\ddot{x}' = 0$ $\ddot{\theta} = 0$

en la ec. de movimiento.

$$-mRa\sin\theta = mR(a - g\cos\theta) \rightarrow -a\sin\theta - a = -g\cos\theta$$

$$\rightarrow a(1 + \sin\theta) = g\cos\theta \quad \text{en } \theta = \frac{\pi}{4} \quad \sin\theta = \cos\theta = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\Rightarrow \frac{a}{g} = \frac{\cos\theta}{1 + \sin\theta} \rightarrow \boxed{\frac{a}{g} = \frac{1}{\sqrt{2} + 1}}$$

Imponiendo el equilibrio en (1) y (2)

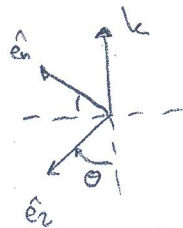
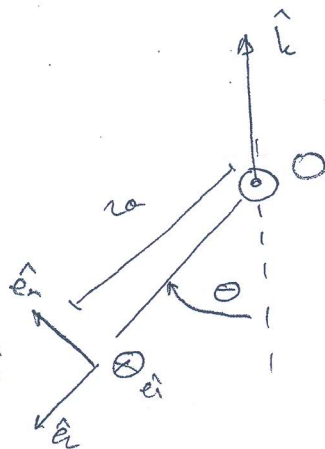
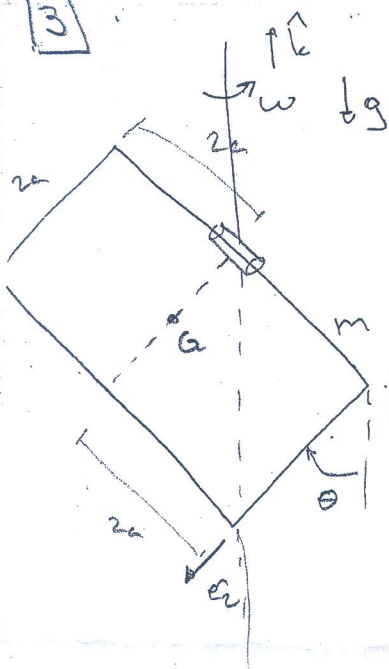
$$F_r = ma$$

$$N = mg$$

No desliza si $|\vec{F}_r| \leq \mu |\vec{N}|$

$$\rightarrow a \leq \mu g \rightarrow \boxed{\frac{a}{g} \leq \mu}$$

3



$$\hat{k} = -\cos\theta \hat{e}_2 + \sin\theta \hat{e}_1$$

$$\vec{\omega} = \omega \hat{k} + \dot{\theta} \hat{e}_1$$

$$= -\omega \cos\theta \hat{e}_2 + \omega \sin\theta \hat{e}_1 + \dot{\theta} \hat{e}_1$$

$$a) \vec{L}_0 = \Pi_0 \vec{\omega}$$

$$\Pi_0 = \Pi_G + J_0^{m,G}$$

$$\vec{r}_G - \vec{r}_0 = a \hat{e}_2$$

$$\Pi_G^{(\hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3)} = \frac{m}{12} \begin{pmatrix} (2a)^2 & 0 & 0 \\ 0 & (4a)^2 & 0 \\ 0 & 0 & (4a)^2 + (2a)^2 \end{pmatrix}$$

$$J_0^{m,G(\hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3)}$$

$$= ma^2 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{ma^2}{3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\vec{\Pi}_0 = ma^2 \begin{pmatrix} \frac{4}{3} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{4}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{8}{3} \end{pmatrix}$$

$$\vec{L}_0 = \frac{4ma^2}{3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{\theta} \\ -\omega \cos\theta \\ \omega \sin\theta \end{pmatrix}$$

$$\vec{L}_0 = \frac{4}{3} ma^2 (-\omega \cos\theta \hat{e}_2 + \omega \sin\theta \hat{e}_1 + \dot{\theta} \hat{e}_1)$$

b) $\dot{\vec{L}}_0 = \vec{M}_0^{ext}$

$$\dot{\vec{L}}_0 = \frac{4}{3} m a^2 \left(+ \omega \dot{\theta} \sin \theta \hat{e}_2 - \omega \cos \theta \dot{\hat{e}}_2 + 2 \omega \dot{\theta} \cos \theta \hat{e}_n + 2 \omega \sin \theta \dot{\hat{e}}_n + \ddot{\theta} \hat{e}_1 + \dot{\theta} \dot{\hat{e}}_1 \right)$$

$$\dot{\hat{e}}_1 = \vec{\omega} \wedge \hat{e}_1 = (-\omega \cos \theta \hat{e}_2 + \omega \sin \theta \hat{e}_n) \wedge \hat{e}_1 = + \omega \cos \theta \hat{e}_n + \omega \sin \theta \hat{e}_2$$

$$\dot{\hat{e}}_2 = (-\omega \cos \theta \hat{e}_2 + \omega \sin \theta \hat{e}_n) \wedge \hat{e}_2 = -\omega \sin \theta \hat{e}_1$$

$$\dot{\hat{e}}_n = (-\omega \cos \theta \hat{e}_2 + \omega \sin \theta \hat{e}_n) \wedge \hat{e}_n = -\omega \cos \theta \hat{e}_1$$

$$\dot{\vec{L}}_0 = \frac{4}{3} m a^2 \left(\omega \dot{\theta} \sin \theta \hat{e}_2 + \omega^2 \cos \theta \sin \theta \hat{e}_1 + 2 \omega \dot{\theta} \cos \theta \hat{e}_n + 2 \omega \sin \theta (-\omega \cos \theta) \hat{e}_1 + \ddot{\theta} \hat{e}_1 + \dot{\theta} (\omega \cos \theta \hat{e}_n + \omega \sin \theta \hat{e}_2) \right)$$

$$\vec{M}_0^{ext} = -mga \sin \theta \hat{e}_1 + M_2 \hat{e}_2 + M_n \hat{e}_n$$

No hay momentos reactivos según $\hat{e}_1$



Ec de mov.: $\dot{\vec{L}}_0 \cdot \hat{e}_1 = \vec{M}_0^{ext} \cdot \hat{e}_1$

$$\frac{4}{3} m a^2 (\ddot{\theta} - \omega^2 \sin \theta \cos \theta) = -mga \sin \theta$$

$$\ddot{\theta} - \omega^2 \sin \theta \cos \theta + \frac{3}{4} \frac{g}{a} \sin \theta = 0 \text{ es el tipo } \ddot{\theta} + f(\theta) = 0$$

puntos de eq θ_{eq} t.q $f(\theta_{eq}) = 0$ si $\left. \frac{df}{d\theta} \right|_{\theta_{eq}} > 0$ estables

$\left. \frac{df}{d\theta} \right|_{\theta_{eq}} < 0$ inestables

$$f(\theta) = \sin \theta \left(\frac{3}{4} \frac{g}{a} - \omega^2 \cos \theta \right) \rightarrow \theta_1 = 0, \theta_2 = \pi$$

$$\theta_3 \exists \text{ si } \frac{3}{4} \frac{g}{a} \frac{1}{\omega^2} < 1$$

$$\theta_3 \text{ t.q } \cos \theta_3 = \frac{3}{4} \frac{g}{a} \frac{1}{\omega^2}$$

$$\frac{df}{d\theta} = \cos\theta \left(\frac{3}{4} \frac{g}{a} - \omega^2 \cos\theta \right) + \omega^2 \sin^2\theta$$

$$\left. \frac{df}{d\theta} \right|_{\theta_1=0} = \frac{3}{4} \frac{g}{a} - \omega^2 \stackrel{?}{> 0} \text{ si } \frac{3}{4} \frac{g}{a} \frac{1}{\omega^2} > 1 \text{ estable}$$

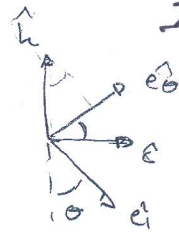
si $\frac{3}{4} \frac{g}{a} \frac{1}{\omega^2} < 1$ inestable.

$$\left. \frac{df}{d\theta} \right|_{\theta_2=\pi} = -1 \left(\frac{3}{4} \frac{g}{a} + \omega^2 \right) < 0 \text{ siempre inestable siempre}$$

$$\left. \frac{df}{d\theta} \right|_{\theta_3} = \omega^2 \sin^2\theta_3 > 0 \text{ Estable}$$

$\Rightarrow \theta_3$ cuando Existe es estable.

AMBITO DE SOLUCIÓN DE SOBRE ENTREGADO MECÁNICA NEWTONIANA 16/2/2023



$$\hat{l} = -\cos\theta \hat{e}_1 + \sin\theta \hat{e}_2$$

$$\hat{z} = \sin\theta \hat{e}_1 + \cos\theta \hat{e}_2$$

$$a) \vec{L}_O^T = \vec{L}_O^A + \vec{L}_O^m$$

$$\text{masa} \quad \vec{r} = R\hat{z} + R\hat{e}_1$$

$$\vec{v}_p = R\dot{\hat{z}} + R\dot{\hat{e}}_1$$

$$\vec{v}_p = R\dot{\psi}\hat{j} + R(\dot{\psi}\sin\theta\hat{j} + \dot{\theta}\hat{e}_\theta)$$

$$\dot{\hat{z}} = \dot{\psi}\hat{l} \wedge \hat{z} = \dot{\psi}\hat{j}$$

$$\dot{\hat{j}} = \dot{\psi}\hat{l} \wedge \hat{j} = -\dot{\psi}\hat{z}$$

$$\dot{\hat{e}}_1 = (\dot{\psi}\hat{l} - \dot{\theta}\hat{j}) \wedge \hat{e}_1 = \dot{\psi}\sin\theta\hat{j} - \dot{\theta}(-\hat{e}_\theta)$$

$$\dot{\hat{e}}_1 = \dot{\psi}\sin\theta\hat{j} + \dot{\theta}\hat{e}_\theta$$

$$\dot{\hat{e}}_\theta = (\dot{\psi}\hat{l} - \dot{\theta}\hat{j}) \wedge \hat{e}_\theta = -\dot{\psi}\cos\theta(-\hat{j})$$

$$\vec{L}_O^m = \vec{r} \wedge m\vec{v}_p$$

$$= (R\hat{z} + R\hat{e}_1) \wedge m \left[R\dot{\psi}(1+\sin\theta)\hat{j} + R\dot{\theta}\hat{e}_\theta \right]$$

$$= mR^2 \left(\dot{\psi}(1+\sin\theta)\hat{l} + mR^2\dot{\theta}\sin\theta(-\hat{j}) + mR^2\dot{\psi}(1+\sin\theta)\hat{e}_\theta - mR^2\dot{\theta}\hat{j} \right)$$

$$= mR^2 \left[\dot{\psi}(1+\sin\theta)\hat{l} - \dot{\theta}(1+\sin\theta)\hat{j} + \dot{\psi}(1+\sin\theta)\hat{e}_\theta \right]$$

$$\text{ARO} \quad \Pi_C^{\{\hat{z}, \hat{j}, \hat{l}\}} = m_a R^2 \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

por completitud
se agrega esta parte
pero $m_a \rightarrow 0$

$$\Pi_O = \Pi_C + \Pi_P^{(M,C)}$$

$$\vec{r}_C - \vec{r}_O = R\hat{z}$$

$$\Pi_P^{M,C} = m_a R^2 \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Pi_O = m_a R^2 \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{3}{2} \end{pmatrix}$$

$$\vec{L}_O^A = \Pi_O \vec{\omega}_A \quad \vec{\omega}_A = \dot{\psi}\hat{l} \Rightarrow \vec{L}_O^A = \frac{3}{2} m_a R^2 \dot{\psi}\hat{l}$$

$$\Rightarrow \vec{L}_0^T = R^2 \left[\left(m(1+\sin\theta) \dot{\varphi} + \frac{3}{2} m_a \dot{\varphi} \right) \hat{k} - m\dot{\theta}(1+\sin\theta) \hat{j} + m\dot{\varphi}(1+\sin\theta) \hat{e}_\theta \right]$$

$$b) \vec{M}_0^{\text{ext}} = R \hat{e}_\theta (-mg \hat{k}) + (R\hat{e}_\theta + R\hat{e}_\theta) \wedge (-mg \hat{k}) + \overbrace{M_1^{\text{react}} \hat{e}_\theta + M_2^{\text{react}} \hat{j}}^{\text{giro libre según } \hat{k}}$$

Ya que las Fuerzas entre la masa y el Aro forman un par de acción y reacción y se cancelan mutuamente.

De otra forma, son internas al sistema total. giro libre según $\hat{k}$

$$\vec{M}_0^{\text{ext}} = mgR \hat{j} + mgR \hat{j} + mgR \sin\theta \hat{j} + \overbrace{M_1^{\text{react}} \hat{e}_\theta + M_2^{\text{react}} \hat{j}}$$

$$\Rightarrow \vec{M}_0^{\text{ext}} \cdot \hat{k} = 0 \quad \rightarrow \quad \frac{d\vec{L}_0}{dt} \cdot \hat{k} = \vec{M}_0^{\text{ext}} \cdot \hat{k} = 0$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{d(\vec{L}_0 \cdot \hat{k})}{dt} &= \frac{d\vec{L}_0}{dt} \cdot \hat{k} + \vec{L}_0 \cdot \frac{d\hat{k}}{dt} = \frac{d\vec{L}_0}{dt} \cdot \hat{k} \quad \left[\begin{array}{l} \hat{k} \text{ es fijo} \\ \frac{d\hat{k}}{dt} = 0 \end{array} \right] \rightarrow \frac{d(\vec{L}_0 \cdot \hat{k})}{dt} = 0 \end{aligned} \right\}$$

$$\Rightarrow \vec{L}_0 \cdot \hat{k} = L_z \text{ cte.}$$

$$L_z = R^2 \left(m(1+\sin\theta) \dot{\varphi} + \frac{3}{2} m_a \dot{\varphi} \right) + R^2 m \dot{\varphi} (1+\sin\theta) \overbrace{\hat{e}_\theta \cdot \hat{k}}^{\sin\theta}$$

$$L_z = R^2 \left(m \dot{\varphi} (1+\sin\theta)^2 + \frac{3}{2} m_a \dot{\varphi} \right)$$

$$\text{Ahora } m_a \rightarrow 0 \Rightarrow \boxed{L_z = m R^2 \dot{\varphi} (1+\sin\theta)^2}$$

c) Fuerzas conservativas: Peso

$$\frac{dE}{dt} = P^{\text{res}} \quad P^{\text{res}} = P_{\text{Normal}} \quad \text{aro}$$

$$\Rightarrow P_{\text{Normal}} = \vec{N}_A \cdot \vec{v}_A + \vec{N}_P \cdot \vec{v}_P$$

hago fuerzas Normales actuando sobre el Aro ($\vec{N}_A$) y sobre la partícula ($\vec{N}_P$) por acción y reacción $\vec{N}_A = -\vec{N}_P$

$$\vec{v}_P = \vec{v}' + \vec{v}_T \text{ (Roverbol)} \text{ y } \vec{v}_T = \vec{v}_A$$

$$\hookrightarrow P_{\text{Normal}} = \vec{N}_A \cdot (\vec{v}_A - \vec{v}' - \vec{v}_A) = \vec{N}_A \cdot \vec{v}' = 0 \quad \rightarrow P^{\text{res}} = 0 \text{ E cte}$$

0 pues $m_a \rightarrow 0$

$$T = \frac{1}{2} m \vec{v}_P^2 + \frac{1}{2} \vec{\omega}_A \cdot \mathbb{I}_A \vec{\omega}_A \quad \rightarrow T = \frac{1}{2} m \vec{v}_P^2$$

$$\vec{v}_P = R(1+\sin\theta) \hat{j} + R\dot{\theta} \hat{e}_\theta$$

$$U_g = -mgR \cos\theta$$

$$T = \frac{1}{2} m R^2 (1+\sin\theta)^2 \dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2} m R^2 \dot{\theta}^2$$

$$E = E_0 = \frac{1}{2} m R^2 \left(\dot{\theta}^2 + \dot{\varphi}^2 (1 + \sin \theta)^2 \right) - mg R \cos \theta$$

$$E_0 = \frac{1}{2} m R^2 \dot{\varphi}_0^2 - mg R$$

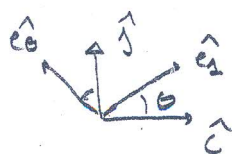
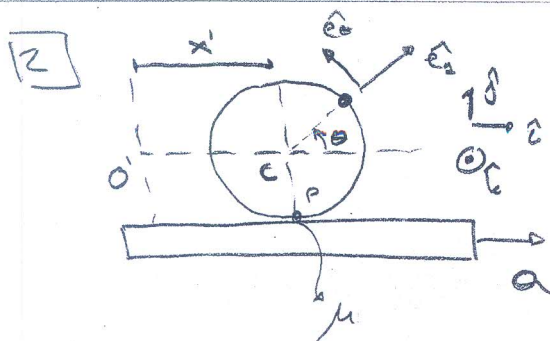
de la conservación de L_z :

$$L_z = m R^2 \dot{\varphi} (1 + \sin \theta)^2 \rightarrow L_z = m R^2 \dot{\varphi}_0$$

$$\rightarrow \dot{\varphi} = \frac{\dot{\varphi}_0}{(1 + \sin \theta)^2}$$

$$c) E_0 = \frac{1}{2} m R^2 \left(\dot{\theta}^2 + \frac{\dot{\varphi}_0^2}{(1 + \sin \theta)^4} (1 + \sin \theta)^2 \right) - mg R \cos \theta = \frac{1}{2} m R^2 \dot{\varphi}_0^2 - mg R$$

$$\dot{\theta}^2 = \dot{\varphi}_0^2 \left(1 - \frac{1}{(1 + \sin \theta)^2} \right) + \frac{2g}{R} (\cos \theta - 1)$$



$$\hat{e}_1 = \cos\theta \hat{e}_2 + \sin\theta \hat{e}_3$$

$$\hat{e}_\theta = -\sin\theta \hat{e}_2 + \cos\theta \hat{e}_3$$

- a) El centro de masa del rígido coincide con la partícula (el disco tiene masa despreciable)

$$\vec{r}_G = \vec{r}_C + R \hat{e}_1$$

$$\dot{\hat{e}}_1 = \vec{\omega} \wedge \hat{e}_1 = \dot{\theta} \hat{k} \wedge \hat{e}_1 = \dot{\theta} \hat{e}_\theta$$

$$\text{con } \vec{r}_C = \vec{r}_{O'} + x' \hat{e}_2$$

$$\dot{\hat{e}}_\theta = \vec{\omega} \wedge \hat{e}_\theta = \dot{\theta} \hat{k} \wedge \hat{e}_\theta = -\dot{\theta} \hat{e}_1$$

$$\vec{v}_G = \vec{v}_C + R \dot{\hat{e}}_1 = \vec{v}_{O'} + \dot{x}' \hat{e}_2 + R \dot{\theta} \hat{e}_\theta$$

$$\vec{a}_G = \vec{a}_{O'} + \ddot{x}' \hat{e}_2 + R \ddot{\theta} \hat{e}_\theta + R \dot{\theta} \dot{\hat{e}}_\theta \quad \text{O' es solidario a la placa} \Rightarrow \vec{a}_{O'} = a \hat{e}_2$$

$$\vec{a}_G = a \hat{e}_2 + \ddot{x}' \hat{e}_2 + R \ddot{\theta} \hat{e}_\theta - R \dot{\theta}^2 \hat{e}_1$$

$$RSD \quad \vec{v}_P = 0 \quad (\text{el sistema solidario a la placa})$$

Dist.

$$\text{Velocidades } \vec{v}_P = \vec{v}_C + \vec{\omega} \wedge (\vec{r}_P - \vec{r}_C) \quad \vec{r}_P - \vec{r}_C = -R \hat{j}$$

$$\vec{v}_P = \dot{x}' \hat{e}_2 + \dot{\theta} \hat{k} \wedge (-R \hat{j}) = (\dot{x}' + R \dot{\theta}) \hat{e}_2 = 0 \Rightarrow \dot{x}' = -R \dot{\theta}$$

$$\ddot{x}' = -R \ddot{\theta}$$

En el sistema absoluto, $\vec{v}_P = \vec{v}_{O'}$ punto de la placa

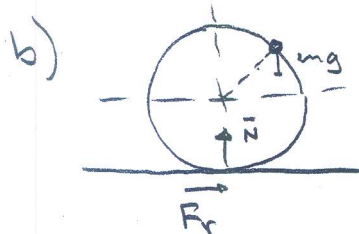
Dist. velocidades

$$\vec{v}_P = \vec{v}_C + \dot{\theta} \hat{k} \wedge (-R \hat{j}) \quad \vec{v}_C = \vec{v}_{O'} + \dot{x}' \hat{e}_2$$

$$\Rightarrow \vec{v}_P = \vec{v}_{O'} + \dot{x}' \hat{e}_2 + R \dot{\theta} \hat{e}_2 = \vec{v}_{O'}$$

$$\Rightarrow \dot{x}' = -R \dot{\theta} \text{ mismo resultado}$$

$$\vec{a}_G = a \hat{e}_2 - R \ddot{\theta} \hat{e}_1 + R \ddot{\theta} \hat{e}_\theta - R \dot{\theta}^2 \hat{e}_1$$



$$1^{\text{ra}} \text{ Cardenal } m \vec{a}_G = N \hat{j} + F_r \hat{e}_2 - mg \hat{j}$$

$$\vec{a}_G = a\hat{e} - R\ddot{\theta}\hat{e} + R\ddot{\theta}(-\sin\theta\hat{e} + \cos\theta\hat{j}) - R\dot{\theta}^2(\cos\theta\hat{e} + \sin\theta\hat{j})$$

1^{ra} cardinal: $m(a - R\ddot{\theta}(1 + \sin\theta) - R\dot{\theta}^2\cos\theta) = F_r$ (1)

$\hat{j}$) $mR(\ddot{\theta}\cos\theta - \dot{\theta}^2\sin\theta) = N - mg$ (2)

2^{da} Cardinal en C (C tiene aceleración)

$$\vec{L}_C = m(\vec{r}_G - \vec{r}_C) \wedge \vec{v}_C + \mathbb{I}_C \vec{\omega}$$

$$\vec{r}_G - \vec{r}_C = R\hat{e}_1 = R\cos\theta\hat{e} + R\sin\theta\hat{j}$$

$$\vec{v}_C = \vec{v}_O + \dot{\chi}'\hat{e} \quad \vec{a}_C = \vec{a}_O + \ddot{\chi}'\hat{e} = a\hat{e} + \ddot{\chi}'\hat{e}$$

$$\frac{d\vec{L}_C}{dt} = m(\vec{v}_G - \vec{v}_C) \wedge \vec{v}_C + m(\vec{r}_G - \vec{r}_C) \wedge \vec{a}_C + \mathbb{I}_C \dot{\vec{\omega}}$$

La 2^{da} cardinal: $\frac{d\vec{L}_C}{dt} = m\vec{v}_G \wedge \vec{v}_C + \vec{M}_C^{(ext)}$

Juntando ambas: $m(\vec{r}_G - \vec{r}_C) \wedge \vec{a}_C + \mathbb{I}_C \dot{\vec{\omega}} = \vec{M}_C^{ext}$

$$m(\vec{r}_G - \vec{r}_C) \wedge \vec{a}_C = -mR\sin\theta(a + \ddot{\chi}')\hat{k}$$

$$\mathbb{I}_C^{(\hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{k})} = mR^2 \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \vec{\omega} = \dot{\theta}\hat{k} \quad \dot{\vec{\omega}} = \ddot{\theta}\hat{k}$$

$$\Rightarrow \vec{M}_C^{ext} = (mR^2\ddot{\theta} - mR(a + \ddot{\chi}')\sin\theta)\hat{k}$$

de la dinámica

$$\vec{M}_C^{ext} = -mgR\cos\theta\hat{k} + F_r R\hat{k}$$

$$\Rightarrow mR^2\ddot{\theta} - mR(a + \ddot{\chi}')\sin\theta = RF_r - mgR\cos\theta \quad (3)$$

Sustituyendo F_r de (1) en (3)

$$mR(R\ddot{\theta} - (a + \ddot{x}')\sin\theta) = mR(a - R\ddot{\theta}(1 + \sin\theta) - R\dot{\theta}^2\cos\theta - g\cos\theta)$$

sustituyo $\ddot{x}' = -R\ddot{\theta}$

Ecuación de movimiento.

c) En eq. relativo $\dot{x}' = 0$ $\dot{\theta}' = 0$ $\ddot{x}' = 0$ $\ddot{\theta} = 0$
en la ec. de movimiento.

$$-mRa\sin\theta = mR(a - g\cos\theta) \rightarrow -a\sin\theta - a = -g\cos\theta$$

$$\rightarrow a(1 + \sin\theta) = g\cos\theta \quad \text{en } \theta = \frac{\pi}{4} \quad \sin\theta = \cos\theta = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\Rightarrow \frac{a}{g} = \frac{\cos\theta}{1 + \sin\theta}$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{a}{g} = \frac{1}{\sqrt{2} + 1}}$$

Imponiendo el equilibrio en (1) y (2)

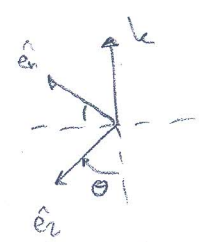
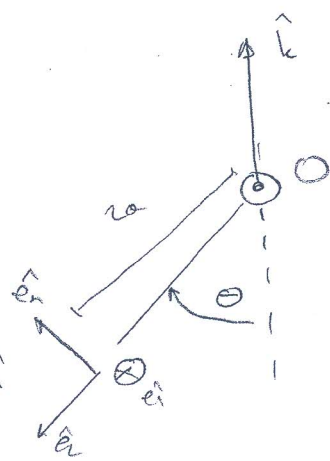
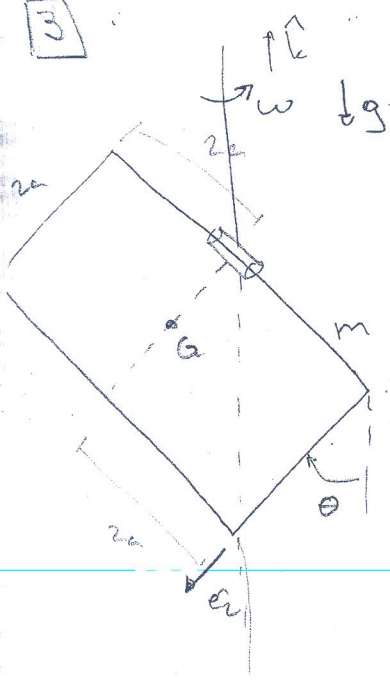
$$F_r = ma$$

$$N = mg$$

No desliza si $|\vec{F}_r| \leq \mu |\vec{N}|$

$$\rightarrow a \leq \mu g \rightarrow \boxed{\frac{a}{g} \leq \mu}$$

3



$$\hat{k} = -\cos\theta \hat{e}_2 + \sin\theta \hat{e}_1$$

$$\begin{aligned}\vec{\omega} &= \omega \hat{k} + \dot{\theta} \hat{e}_1 \\ &= -\omega \cos\theta \hat{e}_2 + \omega \sin\theta \hat{e}_1 + \dot{\theta} \hat{e}_1\end{aligned}$$

a) $\vec{L}_0 = \vec{I}_0 \vec{\omega}$

$$\vec{I}_0 = \vec{I}_G + \vec{J}_0^{M,G}$$

$$\vec{r}_G - \vec{r}_0 = a \hat{e}_2$$

$$\begin{aligned}\vec{I}_G^{(\hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_n)} &= \frac{m}{12} \begin{pmatrix} (2a)^2 & 0 & 0 \\ 0 & (4a)^2 & 0 \\ 0 & 0 & (4a)^2 + (2a)^2 \end{pmatrix} \\ &= \frac{ma^2}{3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

$$\vec{J}_0^{M,G} = ma^2 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\vec{I}_0^{(\hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_n)} = ma^2 \begin{pmatrix} 4/3 & 0 & 0 \\ 0 & 4/3 & 0 \\ 0 & 0 & 4/3 \end{pmatrix}$$

$$\vec{L}_0 = \frac{4ma^2}{3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{\theta} \\ -\omega \cos\theta \\ \omega \sin\theta \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}\vec{L}_0 &= \frac{4}{3} ma^2 (-\omega \cos\theta \hat{e}_2 \\ &\quad + \omega \sin\theta \hat{e}_1) \\ &\quad + \frac{4}{3} ma^2 \dot{\theta} \hat{e}_1\end{aligned}$$

b) $\vec{L}_0 = \vec{M}_0^{ext}$

$$\vec{L}_0 = \frac{4}{3} m a^2 \left(+ \omega \dot{\theta} \sin \theta \hat{e}_2 - \omega \cos \theta \hat{e}_2 + 2 \omega \dot{\theta} \cos \theta \hat{e}_n + 2 \omega \sin \theta \hat{e}_n + \ddot{\theta} \hat{e}_1 + \dot{\theta} \hat{e}_1 \right)$$

$$\dot{\hat{e}}_1 = \vec{\omega} \wedge \hat{e}_1 = (-\omega \cos \theta \hat{e}_2 + \omega \sin \theta \hat{e}_n + \dot{\theta} \hat{e}_1) \wedge \hat{e}_1 = + \omega \cos \theta \hat{e}_n + \omega \sin \theta \hat{e}_2$$

$$\dot{\hat{e}}_2 = (-\omega \cos \theta \hat{e}_2 + \omega \sin \theta \hat{e}_n + \dot{\theta} \hat{e}_1) \wedge \hat{e}_2 = - \omega \sin \theta \hat{e}_1 + \dot{\theta} \hat{e}_n$$

$$\dot{\hat{e}}_n = (-\omega \cos \theta \hat{e}_2 + \omega \sin \theta \hat{e}_n + \dot{\theta} \hat{e}_1) \wedge \hat{e}_n = - \omega \cos \theta \hat{e}_1 - \dot{\theta} \hat{e}_2$$

$$\vec{L}_0 = \frac{4}{3} m a^2 \left(\omega \dot{\theta} \sin \theta \hat{e}_2 + \omega^2 \cos \theta \sin \theta \hat{e}_1 + 2 \omega \dot{\theta} \cos \theta \hat{e}_n + 2 \omega \sin \theta (-\omega \cos \theta) \hat{e}_1 + \ddot{\theta} \hat{e}_1 + \dot{\theta} (\omega \cos \theta \hat{e}_n + \omega \sin \theta \hat{e}_2) - \omega \dot{\theta} \cos \theta \hat{e}_n - 2 \omega \dot{\theta} \sin \theta \hat{e}_2 \right)$$

$$\vec{M}_0^{ext} = -mga \sin \theta \hat{e}_1 + M_2 \hat{e}_2 + M_n \hat{e}_n$$

No hay momentos reactivos según $\hat{e}_1$



Ec de mov.: $\vec{L}_0 \cdot \hat{e}_1 = \vec{M}_0^{ext} \cdot \hat{e}_1$

$$\frac{4}{3} m a^2 (\ddot{\theta} - \omega^2 \sin \theta \cos \theta) = -mga \sin \theta$$

$$\ddot{\theta} - \omega^2 \sin \theta \cos \theta + \frac{3}{4} \frac{g}{a} \sin \theta = 0 \text{ es del tipo } \ddot{\theta} + f(\theta) = 0$$

puntos de eq θ_{eq} t.q $f(\theta_{eq}) = 0$ si $\left. \frac{df}{d\theta} \right|_{\theta_{eq}} > 0$ estables

$\left. \frac{df}{d\theta} \right|_{\theta_{eq}} < 0$ inestables

$$f(\theta) = \sin \theta \left(\frac{3}{4} \frac{g}{a} - \omega^2 \cos \theta \right) \rightarrow \theta_1 = 0, \theta_2 = \pi$$

$$\theta_3 \exists \text{ si } \frac{3}{4} \frac{g}{a} \frac{1}{\omega^2} < 1$$

$$\theta_3 \text{ t.q } \cos \theta_3 = \frac{3}{4} \frac{g}{a} \frac{1}{\omega^2}$$

$$\frac{df}{d\theta} = \cos\theta \left(\frac{3}{4} \frac{g}{a} - \omega^2 \cos\theta \right) + \omega^2 \sin^2\theta$$

$$\left. \frac{df}{d\theta} \right|_{\theta_1=0} = \frac{3}{4} \frac{g}{a} - \omega^2 \stackrel{?}{> 0} \text{ si } \frac{3}{4} \frac{g}{a} \frac{1}{\omega^2} > 1 \text{ estable}$$

$$\text{si } \frac{3}{4} \frac{g}{a} \frac{1}{\omega^2} < 1 \text{ inestable.}$$

$$\left. \frac{df}{d\theta} \right|_{\theta_2=\pi} = -1 \left(\frac{3}{4} \frac{g}{a} + \omega^2 \right) < 0 \text{ siempre inestable siempre}$$

$$\left. \frac{df}{d\theta} \right|_{\theta_3} = \omega^2 \sin^2\theta_3 > 0 \text{ Estable}$$

$\Rightarrow \theta_3$ cuando Existe es estable.