

INSTITUTO DE FÍSICA
FACULTAD DE INGENIERÍA
MECÁNICA NEWTONIANA (1122)

Curso 2024

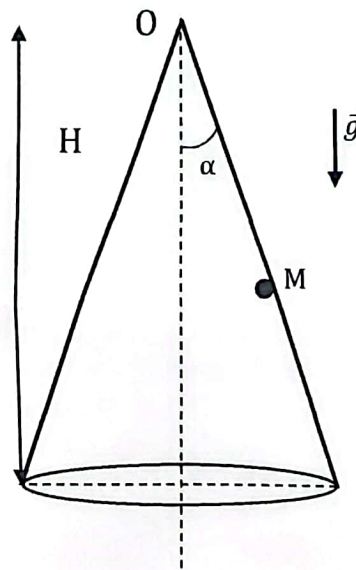
Examen: 31 de julio de 2024.

Duración: 4 horas.



Ejercicio N° 1:

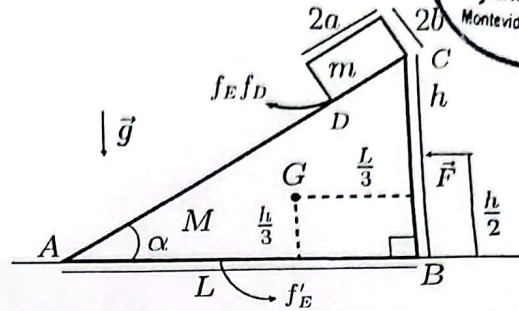
Una partícula de masa M se mueve en la **superficie interior** (vínculo unilateral) de un cono. El cono está fijo, tiene altura H y forma el ángulo α ($0 < \alpha < \pi/2$) con la dirección vertical como indica la figura. El contacto entre la masa y el cono es liso.



- Calcule la posición, velocidad y aceleración de la partícula mientras se mueve en la pared interior del cono en función de las coordenadas y sus derivadas.
- Muestre que la componente vertical del momento angular respecto al punto O es una cantidad conservada y calcúlela en función de las coordenadas y sus derivadas.
- Muestre que este movimiento no tiene soluciones con altura constante.
- Si la partícula parte de una altura $h = H/2$ respecto a la base con velocidad horizontal de módulo v_0 , ¿cuál es el valor mínimo de v_0 para el cual la partícula llegue a la base del cono sin desprenderse?

**Ejercicio N° 2:**

Considere una placa rectangular de masa m y aristas $2a$ y $2b$ que tiene una de sus aristas de largo $2a$ apoyada sobre una rampa triangular ABC con uno de sus vértices coincidiendo con el punto C de la rampa como muestra la figura. La rampa triangular tiene masa M y está apoyada sobre un plano horizontal, el ángulo α vale $\alpha=30^\circ$. Los contactos entre ambas placas tienen coeficientes de rozamiento estático f_E y dinámico f_D , mientras que entre la rampa y el plano horizontal tiene coeficiente de rozamiento estático f'_E . Sobre la rampa actúa una fuerza horizontal de módulo F como se muestra en la figura.

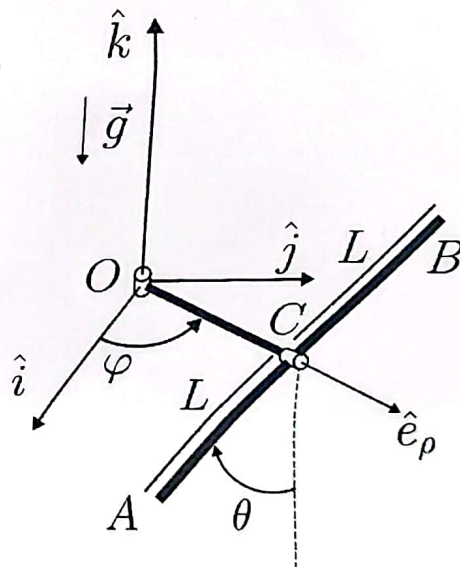


- Suponiendo que el sistema parte del reposo, encuentre las condiciones que se tienen que cumplir para que todo el sistema se encuentre en equilibrio.
- Suponga ahora que la rampa está en equilibrio y la placa rectangular está deslizando hacia abajo con respecto a la rampa. ¿Cuáles deben ser las condiciones para que la placa rectangular deslice respecto a la rampa sin volcar?

SUGERENCIA: $\cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$; $\sin 30^\circ = \frac{1}{2}$

Ejercicio N° 3:

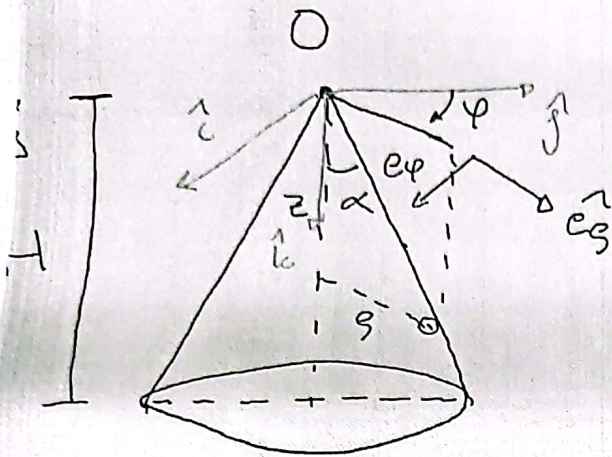
Considere el sistema de la figura formado por las barras homogéneas OC y AB, ambas de largo $2L$ y perpendiculares entre sí por el punto C. La barra OC no tiene masa y la barra AB tiene masa M . Sea $\hat{e}_\rho$ un versor según OC. La barra OC está unida en el punto O a un eje vertical mediante una articulación cilíndrica lisa que le permite girar libremente en la dirección $O\hat{k}$ y permanecer en el plano horizontal (fijo) $O\hat{i}, \hat{j}$. Sea φ el ángulo que forma la barra con respecto a $O\hat{i}$. Mediante otra articulación cilíndrica lisa la barra AB gira libremente en torno a $\hat{e}_\rho$. Sea θ el ángulo que forma AB con respecto a la vertical que pasa por el punto C.



- Pruebe que la componente vertical del momento angular respecto a O del sistema de las barras es una cantidad conservada.
- ¿Qué otra cantidad física se conserva en el movimiento del sistema? Justifique.
- Halle, en función de las coordenadas y sus derivadas, la componente vertical del momento angular respecto a O para el sistema de barras.

Inicialmente se sabe que $\varphi(t=0) = \theta(t=0) = 0$ y que $\dot{\varphi}(t=0) = \dot{\varphi}_0$ y $\dot{\theta}(t=0) = \dot{\theta}_0$ con $\dot{\theta}_0 \approx 0$

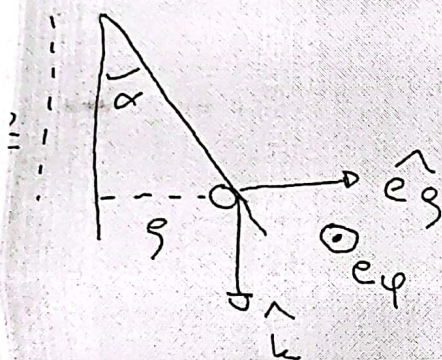
- Halle la velocidad del centro de masas y escriba la velocidad angular cuando $\theta = \pi/2$.



$\{\hat{e}_\rho, \hat{e}_\phi, \hat{k}\}$ base de coordenadas similar a coordenadas cilíndricas

$\{\hat{i}, \hat{j}, \hat{k}\}$ sistema inercial

$$\vec{r} = \rho \hat{e}_\rho + z \hat{k}$$



$$\tan \alpha = \frac{\rho}{z} \Rightarrow \rho = z \tan \alpha$$

$$\vec{r} = z \tan \alpha \hat{e}_\rho + z \hat{k}$$

$$\begin{aligned} \vec{v} &= \dot{\rho} \hat{e}_\rho + \rho \dot{\phi} \hat{e}_\phi + \dot{z} \hat{k} \rightarrow \vec{v} = \dot{z} \tan \alpha \hat{e}_\rho + z \tan \alpha \dot{\phi} \hat{e}_\phi + \dot{z} \hat{k} \\ &= (\ddot{z} \tan \alpha - z \tan \alpha \dot{\phi}^2) \hat{e}_\rho + (z \tan \alpha \ddot{\phi} + 2 \dot{z} \tan \alpha \dot{\phi}) \hat{e}_\phi + \ddot{z} \hat{k} \end{aligned}$$

$$\frac{d(\vec{L}_O \cdot \hat{k})}{dt} = \frac{d\vec{L}_O}{dt} \cdot \hat{k} + \vec{L}_O \cdot \frac{d\hat{k}}{dt}$$

$$\frac{d(\vec{L}_O \cdot \hat{k})}{dt} = \frac{d\vec{L}_O}{dt} \cdot \hat{k}$$

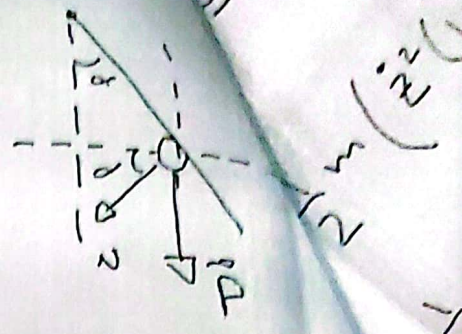
$$\vec{L}_O = (\vec{r} \wedge m \vec{v})$$

$$\frac{d\vec{L}_O}{dt} = \vec{v} \wedge m \vec{v} + \vec{r} \wedge m \vec{a}$$

2ª Ley de Newton $\frac{d\vec{L}_O}{dt} = \vec{r} \wedge \vec{F}_O$

$$\vec{F}_N = mg \hat{k} - N \cos \alpha \hat{e}_g + N \sin \alpha \hat{k}$$

$$\vec{F}_N = (mg + N \sin \alpha) \hat{k} - N \cos \alpha \hat{e}_g$$



$$\frac{d\vec{L}_O}{dt} = (\dot{z} \tan \alpha \hat{e}_g + \dot{z} \hat{k}) \wedge ((mg + N \sin \alpha) \hat{k} - N \cos \alpha \hat{e}_g)$$

$$= (mg + N \sin \alpha) (\dot{z} \tan \alpha) (-\hat{e}_\varphi) + \dot{z} N \cos \alpha (-\hat{e}_\varphi)$$

$$= [(mg + N \sin \alpha) \dot{z} \tan \alpha + N \dot{z} \cos \alpha] (-\hat{e}_\varphi)$$

$$\Rightarrow \frac{d\vec{L}_O}{dt} \cdot \hat{k} = 0 \quad \text{pues } \hat{k} \cdot \hat{e}_\varphi = 0$$

$$\hookrightarrow \frac{d(\vec{L}_O \cdot \hat{k})}{dt} = 0 \quad \vec{L}_O \cdot \hat{k} \text{ const.}$$

$$P_N = \vec{N} \cdot \vec{v} = (N \sin \alpha \hat{k} - N \cos \alpha \hat{e}_g) \cdot (\dot{z} \tan \alpha \hat{e}_g + \dot{z} \tan \alpha \hat{e}_\varphi + \dot{z} \hat{k})$$

$$= -N \cos \alpha \dot{z} \tan \alpha + N \sin \alpha \dot{z} = 0$$

$$\hookrightarrow \tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$$

El sistema es conservativo.

$$E = T + U \quad T = \frac{1}{2} m \vec{v}^2$$

$$U_g = -mgz \quad T = \frac{1}{2} m (\dot{z} \tan \alpha \hat{e}_g + \dot{z} \tan \alpha \hat{e}_\varphi + \dot{z} \hat{k})^2$$

$$T = \frac{1}{2} m (\dot{z}^2 (1 + \tan^2 \alpha) + \dot{z}^2 \tan^2 \alpha)$$

$$\vec{L}_O = (\dot{z} \tan \alpha \hat{e}_g + \dot{z} \hat{k}) \wedge m (\dot{z} \tan \alpha \hat{e}_g + \dot{z} \tan \alpha \hat{e}_\varphi + \dot{z} \hat{k})$$

$$= m \dot{z}^2 \tan^2 \alpha \hat{\varphi} + m \dot{z} \tan \alpha \dot{z} (-\hat{e}_\varphi) + m \dot{z} \dot{z} \tan \alpha \hat{e}_\varphi - m \dot{z} \dot{z} \hat{k}$$

$$L = m \dot{z}^2 t_g^2 \dot{\varphi} = l_0 \text{ cte} \Rightarrow \dot{\varphi} = \frac{l_0}{m \dot{z}^2 t_g^2}$$

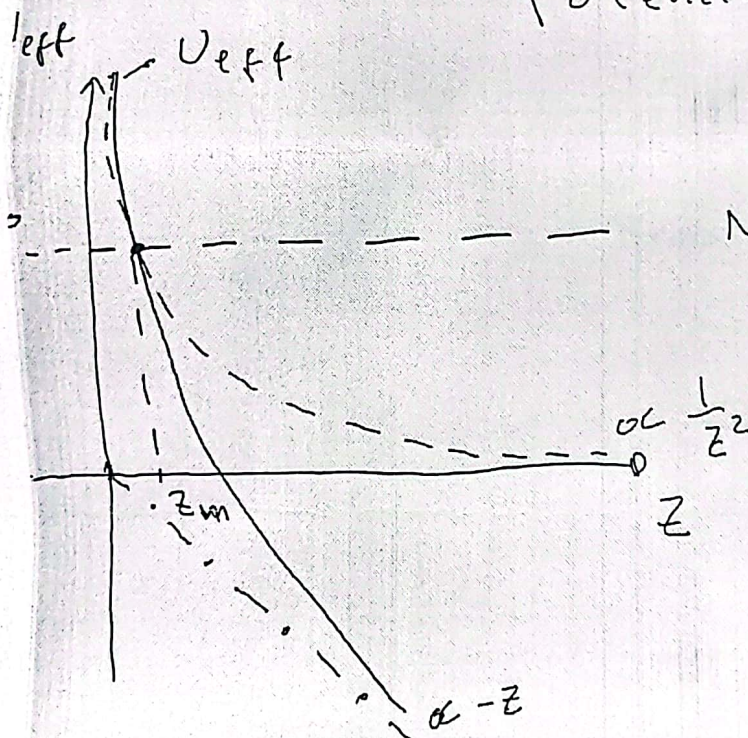
$$\frac{1}{2} m \left(\dot{z}^2 (1 + t_g^2 \alpha) + \frac{z^2 l_0^2}{m^2 z^4 t_g^4 \alpha} \right)$$

$$\frac{1}{2} m \dot{z}^2 (1 + t_g^2 \alpha) + \frac{l_0^2}{2 m t_g^2 \alpha} \frac{1}{z^2}$$

$$= \frac{1}{2} m \dot{z}^2 (1 + t_g^2 \alpha) + \frac{l_0^2}{2 m t_g^2 \alpha} \frac{1}{z^2} - mgz \text{ cte.}$$

Potencial Efectivo

$U_{eff}(z)$



No es posible tener orbitas de altura acotada ya que E_0 No hay soluciones con z cte

a forma: las soluciones de altura constante z_0

ocurren si $\left. \frac{dU_{eff}}{dz} \right|_{z_0} = 0$

$$\frac{U_{eff}}{z} = -\frac{l_0^2}{2 m t_g^2 \alpha} \frac{2}{z^3} - mg \stackrel{?}{=} 0 \Rightarrow z^3 = -\frac{m^2 g t_g^2}{l_0^2}$$

7/19 resultado absurdo p.



si en $t=0$ $z(0) = \frac{H}{2}$ y $\dot{z}(0) = v_0 \hat{e}_\varphi$ la v
 $\dot{z}(0) = 0$ horizontal
 tangente a

$$\vec{r} = \dot{z} \operatorname{tg} \alpha \hat{e}_g + z \dot{\varphi} \hat{e}_\varphi + \dot{z} \hat{h}$$

$$\dot{\vec{r}}(0) = \frac{H}{2} \dot{\varphi}_0 \operatorname{tg} \alpha \hat{e}_\varphi = v_0 \hat{e}_\varphi \Rightarrow \dot{\varphi}_0 = \frac{2 v_0}{H \operatorname{tg} \alpha}$$

$$l_0 = m \dot{z}_0^2 \operatorname{tg} \alpha \dot{\varphi}_0 = m \frac{H}{2} \operatorname{tg} \alpha v_0$$

$$l_0 = \frac{m H}{2} \operatorname{tg} \alpha v_0$$

$$\vec{N} = (m g + N \sin \alpha) \hat{h} - N \cos \alpha \hat{e}_g$$

da Ley de Newton según $\hat{h}$ $m \ddot{z} = m g + N \sin \alpha$

según $\hat{e}_g$) $m (\ddot{z} \operatorname{tg} \alpha - z \operatorname{tg} \alpha \dot{\varphi}^2) = -N \cos \alpha$

$$m g \operatorname{tg} \alpha + N \operatorname{tg} \alpha \sin \alpha - m z \operatorname{tg} \alpha \frac{l_0^2}{m^2 z^4 \operatorname{tg}^4 \alpha} = -N \cos \alpha$$

$$= \frac{l_0}{m z^2 \operatorname{tg} \alpha}$$

$$m g \operatorname{tg} \alpha - m \operatorname{tg} \alpha \left(\frac{m H}{2} \operatorname{tg} \alpha v_0 \right)^2 \frac{1}{z^3} = -N \left(\cos \alpha + \frac{\sin^2 \alpha}{\cos \alpha} \right)$$

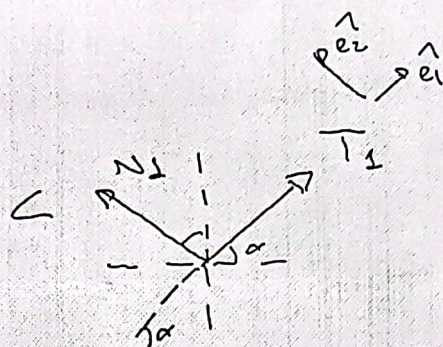
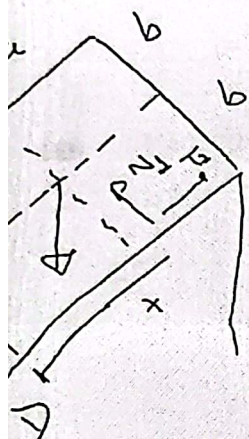
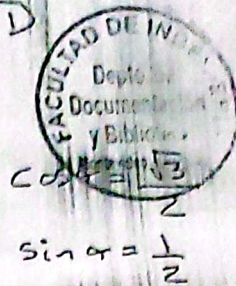
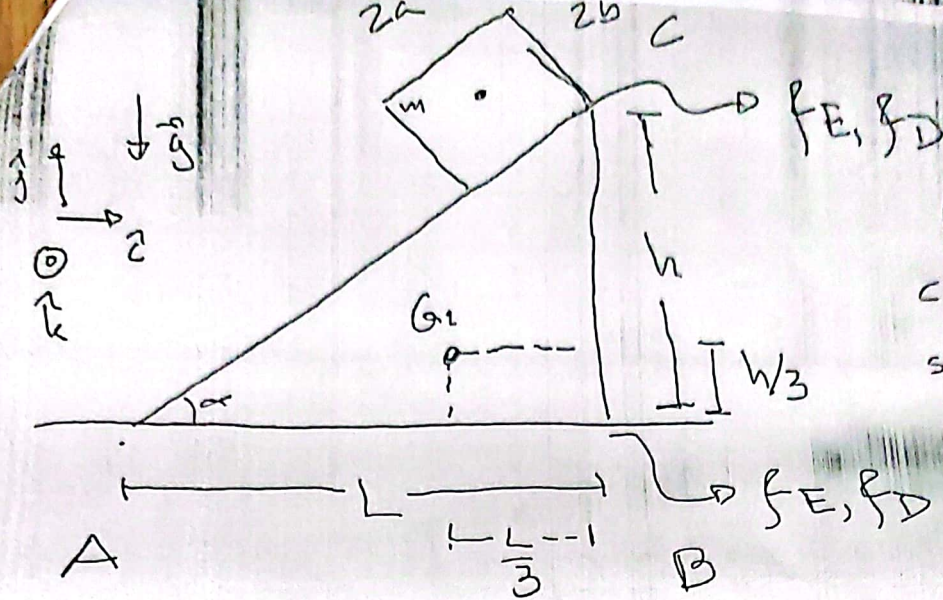
$$z = H$$

$$g \operatorname{tg} \alpha - m \frac{v_0^2}{4 H \operatorname{tg} \alpha} = -\frac{N}{\cos \alpha} \rightarrow N > 0 \Leftrightarrow m \left(\frac{v_0^2}{4 H \operatorname{tg} \alpha} - g \operatorname{tg} \alpha \right)$$

$$\Rightarrow v_0^2 \geq 4 H g \operatorname{tg}^2 \alpha$$

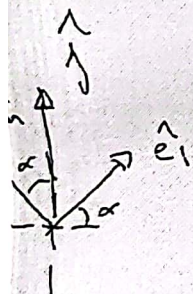
$$v_0 = 2 \sqrt{H g} \operatorname{tg} \alpha$$

6/14



$$\vec{T}_1 = T_1 \cos \alpha \hat{e}_1 + T_1 \sin \alpha \hat{e}_2$$

$$\vec{N}_1 = -N_1 \sin \alpha \hat{e}_1 + N_1 \cos \alpha \hat{e}_2$$



$$\hat{e}_1) T_1 \cos \alpha = N_1 \sin \alpha$$

$$\hat{e}_2) T_1 \sin \alpha + N_1 \cos \alpha = mg$$

$$\cos \alpha \hat{e}_1 + \sin \alpha \hat{e}_2$$

$$\text{momentos nulos: } \vec{M}_D = 0$$

$$N_1 \times \hat{e}_1 - mg \cos \alpha a \hat{e}_1 + mg b \sin \alpha \hat{e}_1$$

$$N_1 \times = mg(a \cos \alpha - b \sin \alpha)$$

7/39

$$1 N_1 = 2\sqrt{3} mg \rightarrow \boxed{N_1 = \frac{\sqrt{3}}{2} mg} \quad \boxed{T_1 = \frac{1}{2} mg}$$

$$\frac{\sqrt{3}}{2} mg x = mg \left(a \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{b}{2} \right) \rightarrow x = a - \frac{b}{\sqrt{3}}$$

Condiciones: $N_1 > 0$ se cumple

$$|\vec{T}_1| \leq \mu_E |\vec{N}_1| \rightarrow \frac{1}{2} mg \leq \mu_E \frac{\sqrt{3}}{2} mg$$

$$\boxed{\mu_E \geq \frac{1}{\sqrt{3}}}$$

Si no se cumple la placa desliza hacia abajo

$$0 < x < 2a \rightarrow 0 < x \Rightarrow a > \frac{b}{\sqrt{3}} \rightarrow \boxed{\frac{a}{b} > \frac{1}{\sqrt{3}}}$$

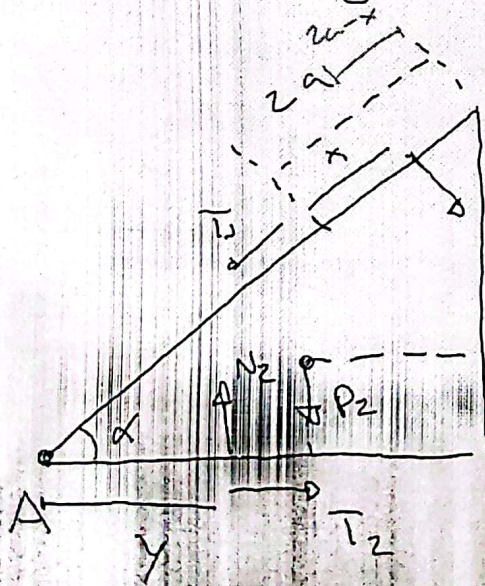
$x < 2a$ se cumple

si no se cumple vuela en sentido antihorario

Equilibrio triángulo

$$\vec{T}_1 = T_1 \cos \alpha \hat{c} + T_1 \sin \alpha \hat{j}$$

$$\vec{N}_1 = -N_1 \sin \alpha \hat{c} + N_1 \cos \alpha \hat{j}$$



$$c) T_2 - T_1 \cos \alpha + N_1 \sin \alpha - F = 0$$

$$f) N_2 - Mg - T_1 \sin \alpha - N_1 \cos \alpha = 0$$

$$\boxed{N_1 = \frac{\sqrt{3}}{2} mg} \quad \boxed{T_1 = \frac{1}{2} mg}$$

8/34

$$\frac{\sqrt{3}}{2} mg + \frac{\sqrt{3}}{2} \frac{1}{2} mg - F = 0 \quad | F = T_2 |$$

$$- Mg - \frac{1}{2} \frac{1}{2} mg - \frac{\sqrt{3}}{2} \frac{\sqrt{3}}{2} mg = 0 \quad | N_2 = (M+m)g |$$

$N_2 > 0$ se cumple γ

$$f_E \vec{N} \rightarrow F \leq f_E (M+m)g$$

$$\tan \alpha = \frac{h}{L}$$

$$h = \frac{L}{\sqrt{3}}$$

$$= 0 = N_2 \gamma - Mg \frac{2L}{3} - N_1 \left(\frac{L}{\cos \alpha} - (2a-x) \right) + \frac{h}{2} F = 0$$

$$= (M+m)g \gamma - Mg \frac{2L}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2} mg \left(\frac{2L}{\sqrt{3}} - 2a + a - \frac{b}{\sqrt{3}} \right) + \frac{L}{2\sqrt{3}} F = 0$$

$$= (M+m)g \gamma - Mg \frac{2L}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2} mg \left(\frac{2L}{\sqrt{3}} - a - \frac{b}{\sqrt{3}} \right) + \frac{L}{2\sqrt{3}} F = 0$$

$$\frac{1}{M+m} \left[\frac{2M}{3} L + \frac{\sqrt{3}}{2} m \left(\frac{2L}{\sqrt{3}} - a - \frac{b}{\sqrt{3}} \right) - \frac{L}{2\sqrt{3}} \frac{F}{g} \right]$$

$$\frac{1}{M+m} \left[L \left(\frac{2}{3} M + m \right) - \frac{\sqrt{3}}{2} \left(a + \frac{b}{\sqrt{3}} \right) m - \frac{L}{2\sqrt{3}} \frac{F}{g} \right]$$

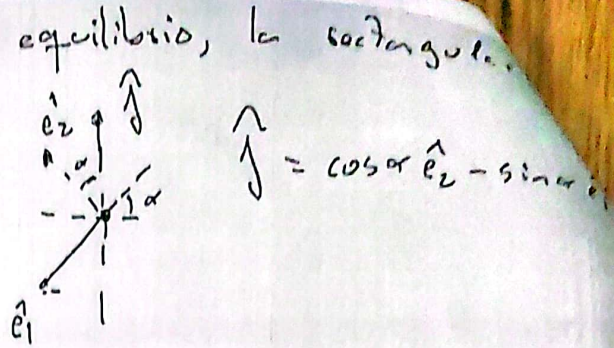
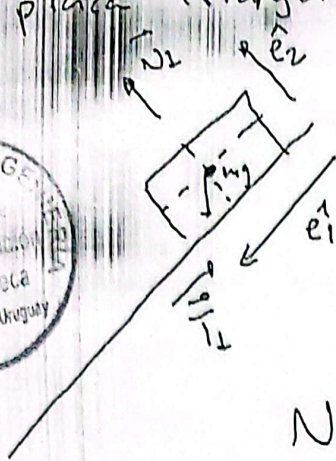
$$= L \underbrace{\left(\frac{\frac{2}{3} M + m}{M+m} \right)}_{\uparrow 1} - \frac{\sqrt{3}}{2} \frac{m}{M+m} \underbrace{\left(a + \frac{b}{\sqrt{3}} \right)}_{\uparrow 2a} - \frac{L}{2\sqrt{3}} \underbrace{\frac{F}{g}}_{\uparrow f}$$

2a
pues $\frac{b}{\sqrt{3}} < a$

$\gamma < L \rightarrow \gamma < L$ se cumple

$$< L \left(\frac{\frac{2}{3} M + m}{M+m} \right) - \frac{\sqrt{3}}{2} \frac{m}{M+m} \left(a + \frac{b}{\sqrt{3}} \right) - \frac{L}{2\sqrt{3}} \frac{F}{g}$$

a) La placa triangular en equilibrio, la coetangul.



$$N_{\perp} - mg \cos \alpha = 0 \quad N_{\perp} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$mg \sin \alpha - T_{\perp} = m \ddot{x}$$

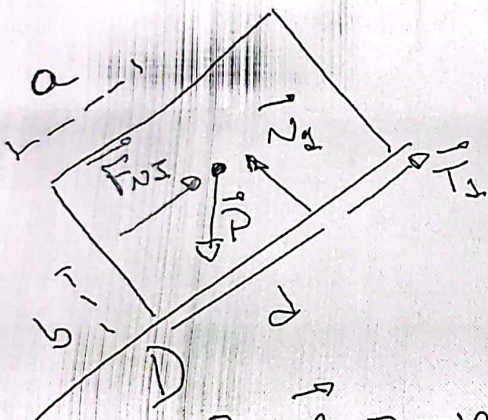
$$\ddot{x} = f_D |\hat{N}_{\perp}| \Rightarrow T_{\perp} = f_D mg \cos \alpha \Rightarrow \ddot{x} = g (\sin \alpha - f_D \cos \alpha)$$

$$\ddot{x} = \frac{g}{2} (1 - \sqrt{3} f_D)$$

Observa

si $f_D <$

$\Rightarrow$



$$F_{f2} = -m \ddot{x} \hat{e}_1$$

$$0 = \vec{M}_D = -m \ddot{x} b \hat{k} - mg \cos \alpha a \hat{k} + mg \sin \alpha b \hat{k}$$

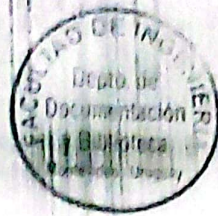
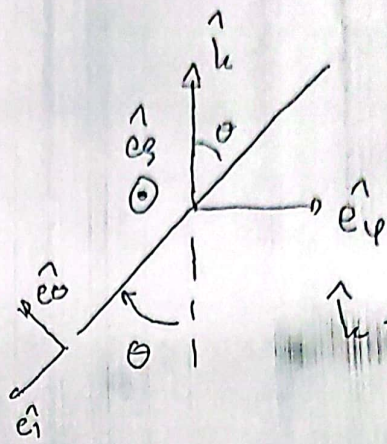
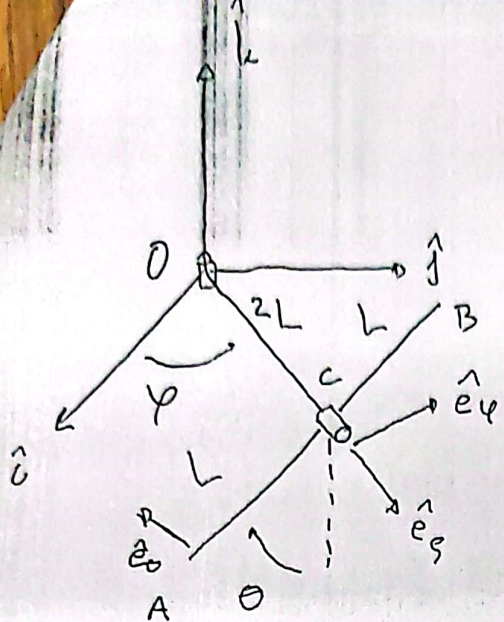
$$= -\frac{mg}{2} (1 - \sqrt{3} f_D) b + mg (b \sin \alpha - a \cos \alpha) + \frac{\sqrt{3}}{2} mg d$$

$$= mg \left[b \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} f_D \right) - \frac{\sqrt{3}}{2} a + \frac{\sqrt{3}}{2} d \right]$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2} mg [d + f_D b - a] \quad d = a - f_D b$$

$$0 < d < 2a \Rightarrow 0 < d \Rightarrow a - f_D b > 0 \Rightarrow \frac{a}{b} > f_D$$

$\hookrightarrow d < 2a$ se verifica. 10/3



$$\hat{k} = -\cos\theta \hat{e}_1 + \sin\theta \hat{e}_2$$

$\vec{L}_O \cdot \hat{k}$ magnitud conservada $\Rightarrow \frac{d(\vec{L}_O \cdot \hat{k})}{dt} = 0$

$$\frac{d(\vec{L}_O \cdot \hat{k})}{dt} = \frac{d\vec{L}_O}{dt} \cdot \hat{k} + \vec{L}_O \cdot \frac{d\hat{k}}{dt}$$

$$\frac{d(\vec{L}_O \cdot \hat{k})}{dt} = 0 \Rightarrow \frac{d\vec{L}_O}{dt} \cdot \hat{k} = 0$$

$$\vec{M}_O^{\text{ext}} \cdot \hat{k} = 0$$

$\vec{M}_O^{\text{ext}} = \vec{M}_O^{\text{react}} + \vec{M}_O^{\text{Act.}}$; $\vec{M}_O^{\text{react}} \cdot \hat{k} = 0$ por articulación cilíndrica en O

$$\vec{M}_O^{\text{Act.}} = 2L \hat{e}_3 \wedge (-mg \hat{k}) = 2mgL \hat{e}_\varphi$$

$$\hat{e}_\varphi \cdot \hat{k} = 0$$

$$\Rightarrow \vec{M}_O^{\text{ext}} \cdot \hat{k} = 0$$

$$\hookrightarrow \vec{L}_O \cdot \hat{k} \text{ magnitud conservada.}$$

Sobre el sistema tenemos: - El peso conservativo

11/15 - Reactivas en O que son de

- Articulaciones lisas para
giros en O y C

La energía se conserva.

$U_g = 0$ pues el centro de masa en C no cambia su altura.

$$) \vec{L}_O \cdot \hat{k} ? \quad \vec{L}_O = \mathbb{I}_O \vec{\omega}$$

$$\vec{\omega} = \dot{\psi} \hat{k} - \dot{\theta} \hat{e}_3$$

$$\vec{\omega} = -\dot{\psi} \cos \theta \hat{e}_1 + \dot{\psi} \sin \theta \hat{e}_2 - \dot{\theta} \hat{e}_3$$

$$= -\cos \theta \hat{e}_1 + \sin \theta \hat{e}_2$$

$$\mathbb{I}_O \{ \hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3 \} = \mathbb{I}_C \{ \hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3 \} + \mathbb{J}_O^{M,C}$$

$$\vec{r}_C - \vec{r}_O = 2L \hat{e}_3 \Rightarrow \mathbb{J}_O^{M,C} = M(2L)^2 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{en } \hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3$$

$$\mathbb{I}_C \{ \hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3 \} = \frac{M(4L^2)}{12} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathbb{I}_O = M L^2 \begin{pmatrix} 4 & & \\ & \frac{1}{3} + 4 & \\ & & \frac{1}{3} \end{pmatrix} = \frac{M L^2}{3} \begin{pmatrix} 12 & 0 & 0 \\ 0 & 13 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\vec{L}_O = \frac{M L^2}{3} \begin{pmatrix} 12 & 0 & 0 \\ 0 & 13 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\dot{\psi} \cos \theta \\ \dot{\psi} \sin \theta \\ -\dot{\theta} \end{pmatrix} = \frac{M L^2}{3} \begin{pmatrix} -12 \dot{\psi} \cos \theta \hat{e}_1 + 13 \dot{\psi} \sin \theta \hat{e}_2 \\ \\ \end{pmatrix}$$

$$\vec{L}_O \cdot \hat{k} = \vec{L}_O \cdot (-\cos \theta \hat{e}_1 + \sin \theta \hat{e}_2) = \frac{M L^2}{3} (12 \dot{\psi} \cos^2 \theta + 13 \dot{\psi} \sin^2 \theta)$$

12/34

$$\frac{ML^2}{3} (12 + \sin^2 \theta) \dot{\varphi}$$

$$\varphi(0) = \dot{\varphi}_0 \quad \dot{\theta}(0) = \dot{\theta}_0 \approx 0 \quad \varphi(0) = \theta(0) = 0$$



$$\frac{1}{2} \vec{\omega} \cdot \mathbb{I}_O \vec{\omega}$$

$$\left(-\dot{\varphi} \cos \theta \hat{e}_1 + \dot{\varphi} \sin \theta \hat{e}_2 - \dot{\theta} \hat{e}_3 \right) \cdot \frac{ML^2}{3} \left(-12 \dot{\varphi} \cos \theta \hat{e}_1 + 12 \dot{\varphi} \sin \theta \hat{e}_2 - \dot{\theta} \hat{e}_3 \right)$$

$$\frac{1}{2} \frac{ML^2}{3} \left(12 \dot{\varphi}^2 \cos^2 \theta + 12 \dot{\varphi}^2 \sin^2 \theta + \dot{\theta}^2 \right)$$

$$\frac{ML^2}{6} \left([12 + \sin^2 \theta] \dot{\varphi}^2 + \dot{\theta}^2 \right)$$

$$T + U = \tau$$

Lo defino $U_g = 0$ pues el c.m. tiene altura constante

$$\hat{L} = \frac{ML^2}{12} (12 + \sin^2 \theta) \dot{\varphi} = l_0 \quad \text{por C.I. } \varphi = \theta = 0$$

$$\dot{\varphi} = \dot{\varphi}_0$$

$$l_0 = ML^2 \dot{\varphi}_0$$

$$= \frac{ML^2}{6} (12 \dot{\varphi}_0^2 + \dot{\theta}_0^2) \approx 2 ML^2 \dot{\varphi}_0^2$$

$$\dot{\varphi} = \frac{12}{ML^2} \frac{l_0}{12 + \sin^2 \theta} = \frac{12 \dot{\varphi}_0}{12 + \sin^2 \theta}$$

estuyo en $E = E_0$

$$L^2 \dot{\varphi}_0^2 = \frac{ML^2}{6} \left([12 + \sin^2 \theta] \left(\frac{12 \dot{\varphi}_0}{12 + \sin^2 \theta} \right)^2 + \dot{\theta}^2 \right)$$

13/19

$$2 \dot{\psi}_0^2 = \frac{(12)^2 \dot{\psi}_0^2}{12 + \sin^2 \theta} + \dot{\theta}^2$$



$$\theta_f = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \sin \theta_f = 1$$

$$12 \dot{\psi}_0^2 = \frac{(12)^2}{13} \dot{\psi}_0^2 + \dot{\theta}_f^2$$

$$12 \left(1 - \frac{12}{13} \right) \dot{\psi}_0^2 = \dot{\theta}_f^2 \Rightarrow \boxed{\dot{\theta}_f^2 = \frac{12}{13} \dot{\psi}_0^2}$$

$$\dot{\psi}_f = \frac{12}{13} \dot{\psi}_0 \Rightarrow \vec{\omega} = \frac{12}{13} \dot{\psi}_0 \hat{k} - \sqrt{\frac{12}{13}} \dot{\psi}_0 \hat{e}_\theta$$

$$\vec{v}_c = 2L \dot{\psi} \hat{e}_\varphi$$

$$\vec{v}_c(t=0) = 2L \dot{\psi}_0 \hat{e}_\varphi$$

$$\vec{v}_c(t_f) = 2L \frac{12}{13} \dot{\psi}_0 \hat{e}_\varphi$$

14/14