

INSTITUTO DE FÍSICA
FACULTAD DE INGENIERÍA
MECÁNICA NEWTONIANA (1122)
Curso 2025-2S

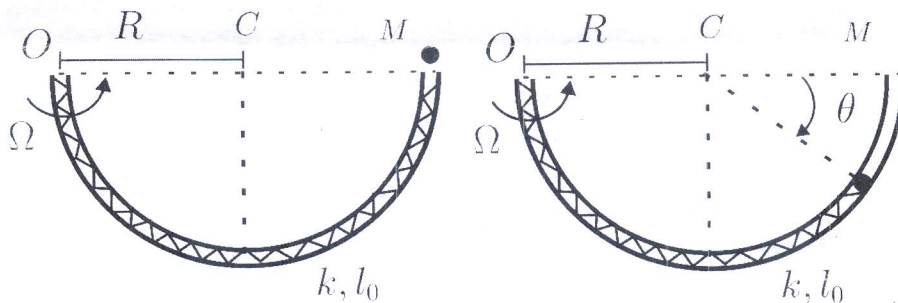
Examen: 16 de Diciembre de 2025.

Duración: 4 horas.

Ejercicio N° 1:

Una partícula de masa M se encuentra en reposo en un sistema de referencia inercial. En el instante inicial ($t = 0$) la partícula es atrapada en el interior de un tubo semicircular liso de radio R (vínculo bilateral) y centro C . El tubo gira respecto a un eje perpendicular al plano del tubo en el punto fijo O con velocidad angular constante Ω como indica la figura. El interior del tubo tiene un resorte de constante elástica k y longitud natural l_0 ($l_0 = \pi R$) el resorte está dispuesto de tal forma de que la fuerza que ejerce siempre es tangente al tubo. El ángulo θ describe la posición de la partícula relativa al tubo (ver figura). **No actúa el peso.**

- Definiendo apropiadamente una o más bases de versores, escriba la posición, velocidad y aceleración absolutas de la partícula.
- Escriba la deformación del resorte $l - l_0$ donde l es el largo del resorte.
- Obtenga la ecuación de movimiento de la partícula.
- Encuentre la ecuación algebraica que permite determinar el ángulo en el que $\dot{\theta} = 0$.

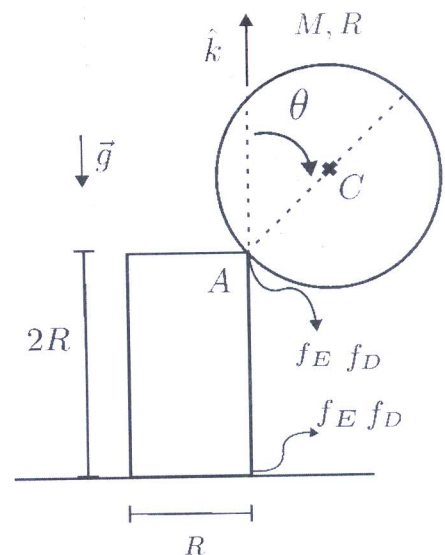


Ejercicio N° 2:

Sobre el borde de un bloque homogéneo, de masa M , ancho R y altura $2R$ se apoya un disco homogéneo de radio R y masa M . El coeficiente de fricción estática entre el disco y el bloque es f_E y el dinámico f_D y son iguales para la superficie del bloque con el plano horizontal. El disco está inicialmente apoyado con su centro de masa (C) sobre una recta vertical que pasa por A ($\theta = 0$) como indica la figura. Además, se cumple que $\dot{\theta}(t = 0) \approx 0$.

Estudiaremos el movimiento del disco asumiendo que el bloque permanece en equilibrio.

- Halle la ecuación del movimiento para el disco válida mientras el mismo no desliza con respecto al bloque.



- b) Encuentre la ecuación algebraica que debe cumplir el ángulo θ_D para el cual el disco comienza a deslizarse con respecto al bloque.
- c) Escriba las fuerzas reactivas que el bloque ejerce sobre el disco en función de θ . Escriba sus componentes verticales y horizontales.

Ahora trabajaremos con el bloque:

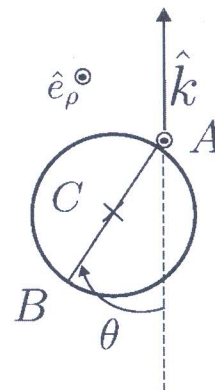
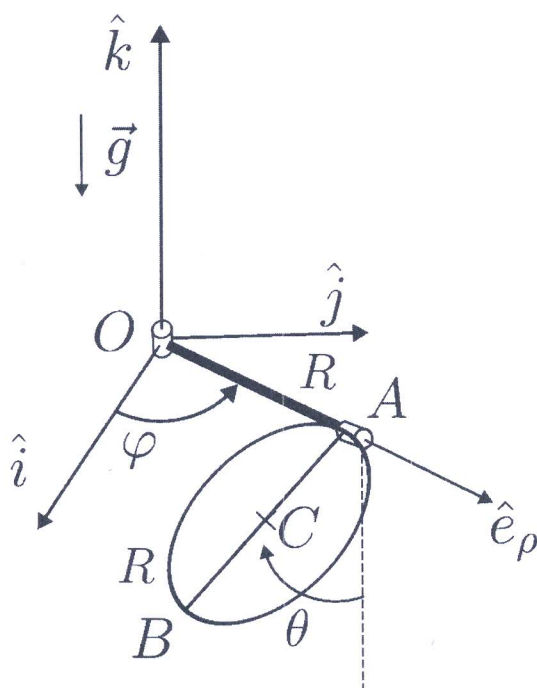
- d) Suponiendo que el bloque no puede volcar, encuentre la ecuación algebraica que debe cumplir θ para que el bloque nunca se deslice con respecto al piso.

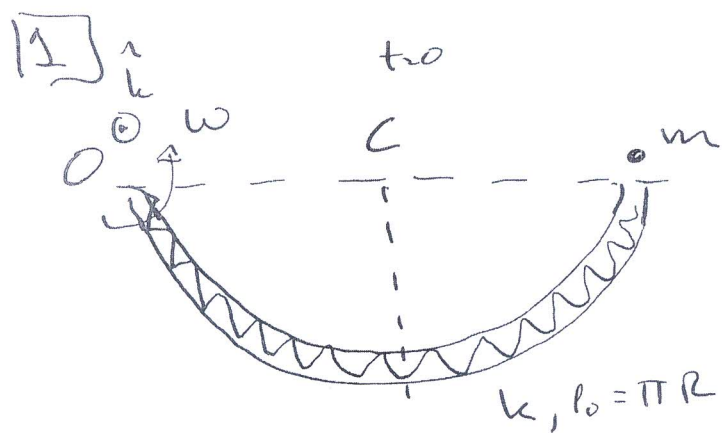
Ejercicio N° 3:

Considere el sistema de la figura formado por la barra de masa despreciable OA de largo R y el disco de radio R y masa M . El disco se encuentra unido a la barra en el punto A mediante una articulación cilíndrica lisa. La barra es perpendicular al plano del disco y el eje de la articulación ($\hat{e}_\rho$) es colineal a la barra. Además, la barra OA está unida en el punto O (fijo) a un eje vertical mediante una articulación cilíndrica lisa que le permite girar libremente en la dirección $O\hat{k}$ y permanecer en el plano horizontal (fijo) $O\hat{i}, \hat{j}$.

Sea φ el ángulo que forma la barra con respecto a $O\hat{i}$ y θ el ángulo que forma el diámetro del disco AB con respecto a la vertical que pasa por el punto A .

- Pruebe que la componente vertical del momento angular respecto a O del sistema de la barra y el disco es una cantidad conservada.
- ¿Qué otra cantidad física se conserva en el movimiento del sistema? Justifique.
- Escriba la velocidad del centro de masa del sistema.
- Escriba el tensor de inercia del sistema respecto al punto O $\mathbb{I}_O$.
- Halle, en función de las coordenadas y sus derivadas, la componente vertical del momento angular respecto a O para el sistema.
- Halle, en función de las coordenadas y sus derivadas, la otra cantidad conservada del sistema.





$$\vec{r} = R \hat{e}_1 + R \hat{e}_r$$

$$\vec{v} = R \dot{\hat{e}}_1 + R \dot{\hat{e}}_r$$

$$\vec{v} = R\omega \hat{e}_2 - R(\omega - \dot{\theta}) \hat{e}_\theta$$

$$\vec{a} = R\omega \dot{\hat{e}}_2 + R\ddot{\theta} \hat{e}_\theta - R(\omega - \dot{\theta}) \dot{\hat{e}}_\theta$$

$$\vec{a} = -R\omega^2 \hat{e}_1 + R\ddot{\theta} \hat{e}_\theta - R(\omega - \dot{\theta})^2 \hat{e}_r$$

b)

Dinámica No hay peso

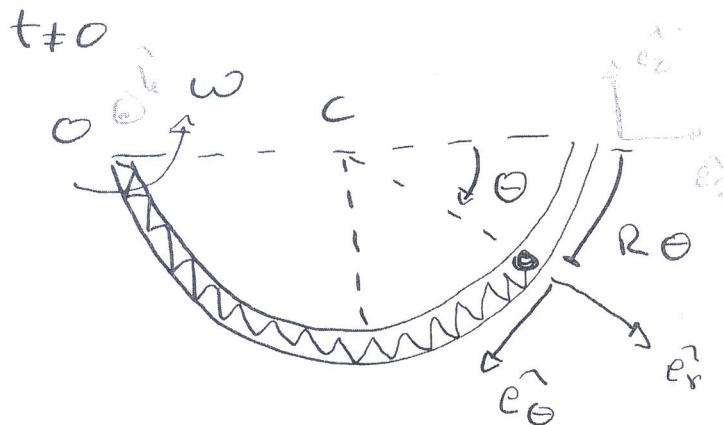
Tengo la fuerza Normal $\vec{N} = N \hat{e}_r$
es bilateral

Fuerza elástica

l = largo del resorte

$$l = \pi R - R\theta \rightarrow l - l_0 = \pi R - R\theta - \pi R \rightarrow l - l_0 = -R\theta$$

Wcte



$$S_1: \{\hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{l}\} \text{ vel. } \vec{\Omega}_1 = \omega \hat{l}$$

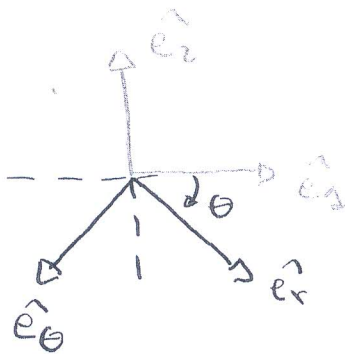
$$S_2: \{\hat{e}_r, \hat{e}_\theta, \hat{l}\} \text{ } \vec{\Omega}_2 = \omega \hat{l} - \dot{\theta} \hat{l}$$

$$\dot{\hat{e}}_1 = \vec{\Omega}_1 \wedge \hat{e}_1 = \omega \hat{e}_2$$

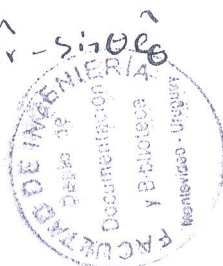
$$\dot{\hat{e}}_2 = \vec{\Omega}_1 \wedge \hat{e}_2 = -\omega \hat{e}_1$$

$$\dot{\hat{e}}_r = \vec{\Omega}_2 \wedge \hat{e}_r = -(\omega - \dot{\theta}) \hat{e}_\theta$$

$$\dot{\hat{e}}_\theta = \vec{\Omega}_2 \wedge \hat{e}_\theta = (\omega - \dot{\theta}) \hat{e}_r$$



$$\hat{e}_1 = \cos \theta \hat{e}_r - \sin \theta \hat{e}_\theta$$



$$c) F_{el} = -k(x-x_0) e_\theta \rightarrow F_{el} = -kR\theta e_\theta$$

$$2^{da} \text{ ley de Newton: } \vec{F}_N = m\vec{a}$$

$$N \hat{e}_r - kR\theta \hat{e}_\theta = mR\ddot{\theta} \hat{e}_\theta - mR\omega^2 \hat{e}_r - mR(\omega - \dot{\theta})^2 \hat{e}_r$$

Proyeto:

$$\hat{e}_r) N = -mR\omega^2 \cos\theta - mR(\omega - \dot{\theta})^2$$

$$\hat{e}_\theta) -kR\theta = mR\ddot{\theta} + mR\omega^2 \sin\theta$$

$$\text{Ec. de movimiento } \ddot{\theta} + \omega^2 \sin\theta + \frac{k}{m} \theta = 0$$

d) Es una ecuación preintegrable.

$$\text{C.I. } \theta(0) = 0 \quad \gamma \quad \vec{v}(0) = 0$$



$$\vec{v}(0) = 0 = R\omega \hat{e}_2(0) - R(\omega - \dot{\theta}(0)) \hat{e}_\theta(0)$$

$$\hat{e}_2(0) = -\hat{e}_\theta(0) \Rightarrow 0 = [R\omega + R(\omega - \dot{\theta}(0))] \hat{e}_2(0)$$

$$\Rightarrow \boxed{\dot{\theta}(0) = 2\omega}$$

Pre-integro la ec. de movimiento

$$\frac{1}{2} \dot{\theta}^2 - \frac{1}{2} \dot{\theta}^2(0) - \omega^2 (\cos\theta - \cos\theta(0)) + \frac{1}{2} k \theta^2 - \frac{1}{2} k \theta^2(0) = 0$$

$$\frac{1}{2} \dot{\theta}^2 - 2\omega^2 - \omega^2 (\cos\theta - 1) + \frac{1}{2} k \theta^2 = 0$$

$$2\omega^2(\cos\theta + 1) - k\dot{\theta}^2 = 0$$

$$\dot{\theta}^2 = 2\omega^2(\cos\theta + 1) - k\dot{\theta}^2$$

la partícula se detiene en θ_d si $\dot{\theta}(\theta_d) = 0$

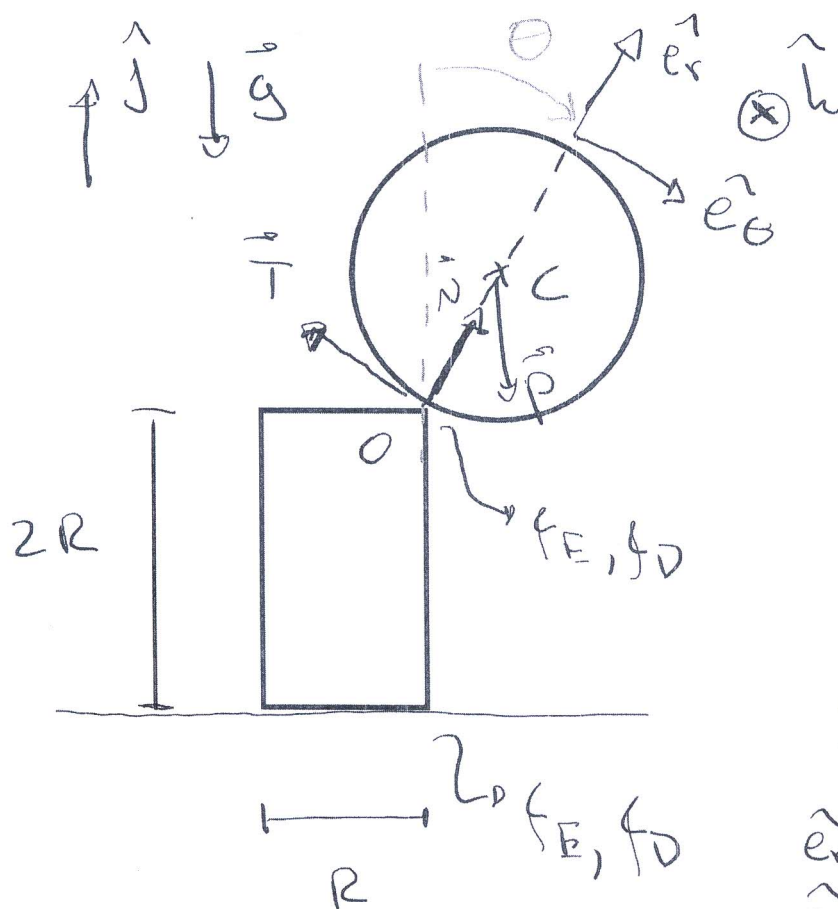
$$\text{si } 2\omega^2(\cos\theta_d + 1) - k\dot{\theta}_d^2 = 0$$

→ la ecuación algebraica que debe cumplir θ_d es:

$$\cos\theta_d + 1 - \frac{k}{2\omega^2}\dot{\theta}_d^2 = 0$$



[2]



$$\begin{aligned}\hat{j} &= \cos\theta \hat{e}_r - \sin\theta \hat{e}_\theta \\ \hat{e}_r &= \cos\theta \hat{j} + \sin\theta \hat{i} \\ \hat{e}_\theta &= -\sin\theta \hat{j} + \cos\theta \hat{i}\end{aligned}$$

a) Ec. de movimiento para el Disco
mientras la placa está en equilibrio.
El disco no desliza.

Si el disco no desliza $\Rightarrow$ RSD

El sistema es conservativo $E = cte$

$$E = \frac{1}{2} M \vec{v}_C^2 + \frac{1}{2} \vec{\omega} I_C \vec{\omega} + U_g$$

$\vec{r}_C = R \hat{e}_r$
 $\vec{v}_C = R \dot{\theta} \hat{e}_\theta$

posición y velocidad del
 centro de masa del disco
 mientras RSD.

$$\{\hat{e}_r, \hat{e}_\theta, \hat{k}\} = \frac{mR^2}{2} \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\vec{\omega} = \dot{\theta} \hat{k}$$

$$I_C \vec{\omega} = \frac{mR^2}{2} \dot{\theta} \hat{k}$$

$$U_g = M g R \cos \theta$$

$$E = \frac{1}{2} m R^2 \dot{\theta}^2 + \frac{m R^2}{4} \dot{\theta}^2 + M g R \cos \theta$$

$$\frac{dE}{dt} = 0 = m R^2 \dot{\theta} \ddot{\theta} + \frac{m R^2}{2} \dot{\theta} \ddot{\theta} - M g R \dot{\theta} \sin \theta$$

$$\rightarrow m R^2 \left(\ddot{\theta} + \frac{1}{2} \ddot{\theta} - \frac{g}{R} \sin \theta \right) = 0$$

$$\rightarrow \frac{3}{2} \ddot{\theta} + \frac{g}{R} \sin \theta = 0 \rightarrow \boxed{\ddot{\theta} = -\frac{2}{3} \frac{g}{R} \sin \theta}$$

También se puede hacer por cardinales

$$\vec{a}_C = R \ddot{\theta} \hat{e}_\theta - R \dot{\theta}^2 \hat{e}_r$$

$$1^{\text{ra}} \text{ Cardinal} \quad -Mg \hat{j} + N \hat{e}_r - T \hat{e}_\theta = m R \ddot{\theta} \hat{e}_\theta - m R \dot{\theta}^2 \hat{e}_r$$

$$-Mg(\cos \theta \hat{e}_r - \sin \theta \hat{e}_\theta) + N \hat{e}_r - T \hat{e}_\theta = m R \ddot{\theta} \hat{e}_\theta - m R \dot{\theta}^2 \hat{e}_r$$



$$1) M g \sin \theta - T = M R \ddot{\theta} \quad (1)$$

2^{da} cardinal en C $\frac{d\vec{L}_C}{dt} = \vec{M}_C^{ext}$ C es el centro de masa.

$$\frac{d\vec{L}_C}{dt} = \frac{M R^2}{2} \ddot{\theta} \hat{k} \quad \vec{M}_C^{ext} = R T \hat{k}$$

$$\Rightarrow R T = \frac{M R^2}{2} \ddot{\theta} \Rightarrow T = \frac{M R}{2} \ddot{\theta} \quad (2)$$

→ Vuelvo a (1) usando (2)

$$M g \sin \theta - \frac{M R}{2} \ddot{\theta} = M R \ddot{\theta} \Rightarrow \boxed{\frac{3}{2} \ddot{\theta} = \frac{g}{R} \sin \theta}$$

b) la ec. de movimiento es preintegrable
condición Inicial: $\theta(0) = 0 \quad \dot{\theta}(0) \neq 0$

$$\Rightarrow \frac{\dot{\theta}^2}{2} - \frac{\dot{\theta}^2(0)}{2} = -\frac{2}{3} \frac{g}{R} [\cos \theta - \cos \theta(0)]$$



$$\dot{\theta}^2 = -\frac{4}{3} \frac{g}{R} [\cos \theta - 1]$$

condición según $\hat{e}_r$

$$N - Mg \cos \theta = -MR \dot{\theta}^2$$

$$N = Mg \cos \theta + \frac{4}{3} Mg [\cos \theta - 1]$$

$$N = Mg \left[\frac{7}{3} \cos \theta - \frac{4}{3} \right]$$

$N > 0$ hasta

$$\cos \theta_1 = \frac{4}{7}$$

$$\theta_1 < \pi/2$$

$$T = \frac{MR}{2} \ddot{\theta} \rightarrow T = \frac{1}{3} Mg \sin \theta$$

No desliza si

$$|\vec{T}| \leq f_E |\vec{N}| \quad \text{entre } 0 > \theta_1$$

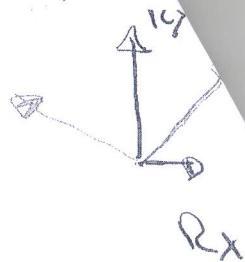


$$\frac{1}{3} Mg \sin \theta \leq f_E Mg \left[\frac{7}{3} \cos \theta - \frac{4}{3} \right]$$

$$\frac{\sin \theta}{7 \cos \theta - 4} \leq f_E$$

$$c) \text{ Tengo } \vec{N} = \frac{Mg}{3} [7 \cos \theta - 4] \hat{e}_r$$

$$\vec{T} = -\frac{Mg}{3} \sin \theta \hat{e}_\theta$$



$$\hat{e}_r = \cos \theta \hat{j} + \sin \theta \hat{i}$$

$$\hat{e}_\theta = -\sin \theta \hat{j} + \cos \theta \hat{i}$$

Escribo la fuerza

reactiva en $\hat{i}$ y $\hat{j}$

$$\vec{R} = \vec{N} + \vec{T} = R_x \hat{i} + R_y \hat{j}$$

$$\vec{R} = \frac{Mg}{3} [7 \cos \theta - 4] (\cos \theta \hat{j} + \sin \theta \hat{i})$$

$$- \frac{Mg}{3} \sin \theta (\cos \theta \hat{i} - \sin \theta \hat{j})$$



$$R_x = \frac{Mg}{3} [7 \cos \theta \sin \theta - 4 \sin \theta - \sin \theta \cos \theta]$$

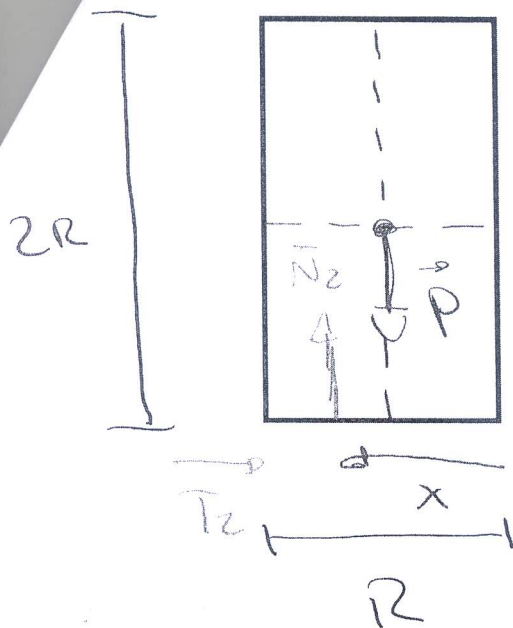
$$= \frac{Mg}{3} [6 \sin \theta \cos \theta - 4 \sin \theta]$$

$$R_x = \frac{1}{3} Mg [6 \sin \theta \cos \theta - 4 \sin \theta]$$

$$R_y = \frac{Mg}{3} [7 \cos^2 \theta - 4 \cos \theta + \sin^2 \theta]$$

$$R_y = \frac{Mg}{3} [6 \cos^2 \theta - 4 \cos \theta + 1]$$

$$\vec{R}^{ext} = 0$$



No analizamos el vuelco
por eso NO usamos
 $\vec{M}_O^{ext} = 0$

$$-Mg\hat{j} + N_2\hat{j} - R_y\hat{j} + T_2\hat{i} - Rx\hat{i} = 0$$

$$\boxed{T_2 = Rx} \quad T_2 = \frac{1}{3} Mg \sin \theta [7 \cos \theta - 4] > 0$$

$\theta < \theta_1$

$$N_2 = Mg + R_y$$

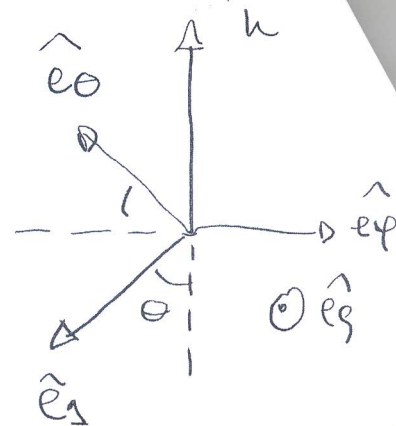
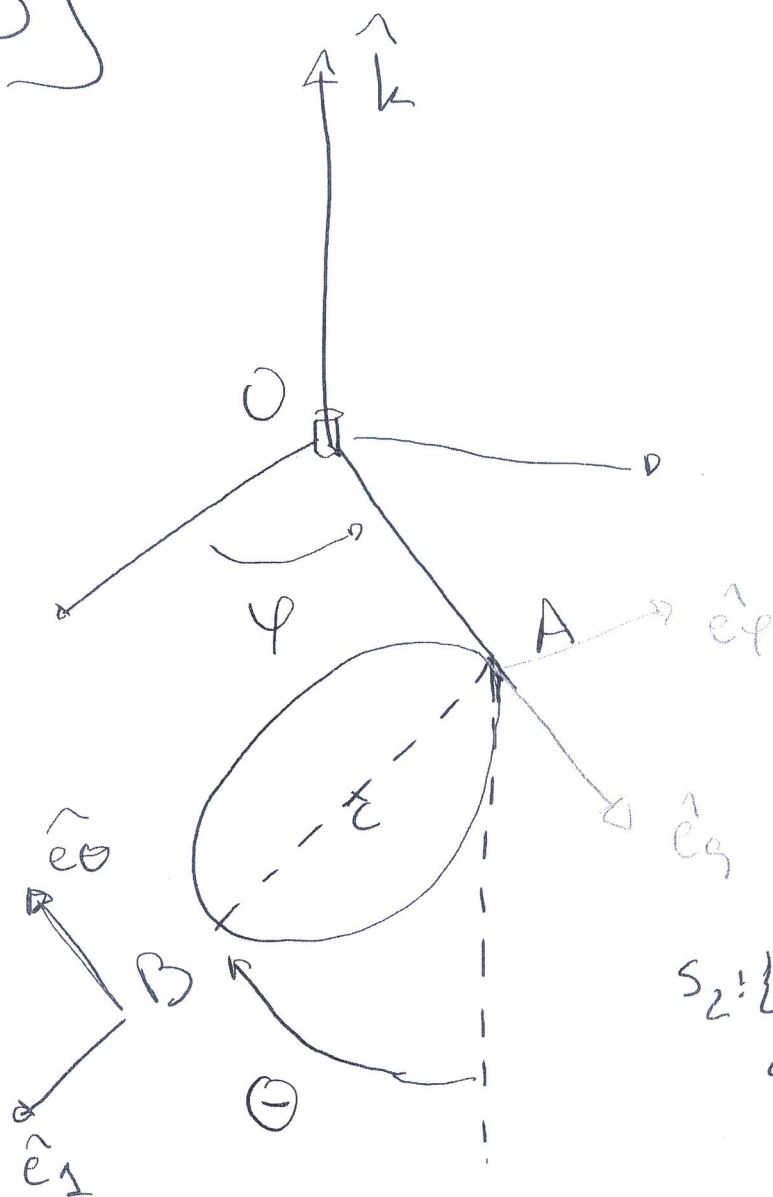
$$N_2 = \frac{Mg}{3} [6 \cos^2 \theta - 4 \cos \theta + 4] > 0$$

$$|\vec{T}_2| \leq f_E |\vec{N}_2|$$

$$\boxed{\frac{\sin \theta [7 \cos \theta - 4]}{6 \cos^2 \theta - 4 \cos \theta + 4} \leq f_E}$$



13)



$$\begin{aligned}\hat{k} &= -\cos\theta \hat{e}_2 + \sin\theta \hat{e}_1 \\ \hat{e}_\varphi &= -\sin\theta \hat{e}_1 - \cos\theta \hat{e}_2 \\ \hat{e}_\theta &= -\cos\theta \hat{e}_\varphi + \sin\theta \hat{k}\end{aligned}$$

$$S_1: \{\hat{e}_2, \hat{e}_\varphi, \hat{k}\} \quad \vec{\omega}_1 = \dot{\varphi} \hat{k}$$

$$S_2: \{\hat{e}_2, \hat{e}_\theta, \hat{e}_1\} \quad \vec{\omega}_2 = \dot{\varphi} \hat{k} - \dot{\theta} \hat{e}_2$$

Sistema solidario d
Rígido.

$$\vec{\omega}_2 = -\dot{\varphi} \cos\theta \hat{e}_1 + \dot{\varphi} \sin\theta \hat{e}_2 - \dot{\theta} \hat{e}_2$$

$$a) \vec{L}_0 \cdot \hat{k} \text{ cte?} \quad \frac{d(\vec{L}_0 \cdot \hat{k})}{dt} = \frac{d\vec{L}_0}{dt} \cdot \hat{k} + \vec{L}_0 \cdot \frac{d\hat{k}}{dt}$$

$$\frac{d\vec{L}_0}{dt} = \vec{M}_0^{\text{ext}}$$

(2da Cardinal)

$\hat{k}$ cte.

$$\vec{M}_0^{\text{ext}} = \vec{M}_0^{\text{peso}} + \vec{M}_0^{\text{react}}$$



$h = 0$ articulaciones simétricas

$$L_0^{\text{peso}} = \underbrace{\vec{r}_C \wedge (-Mg\hat{h})}_{\perp \hat{h}} \rightarrow \vec{M}_0^{\text{peso}} \cdot \hat{h} = 0$$

$$\vec{M}_0^{\text{ext}} \cdot \hat{h} = 0 \rightarrow \frac{d\vec{L}_0}{dt} \cdot \hat{h} = 0 \Rightarrow \frac{d(\vec{L}_0 \cdot \hat{h})}{dt} = 0$$

$$\Rightarrow \vec{L}_0 \cdot \hat{h} = \text{cte.}$$

b) También se conserva la energía mecánica. Los giros son libres y las articulaciones lisas. La única fuerza que hace trabajo es el Peso.

$$E = \text{cte}$$

$$c) \Pi_0(\hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3) = \Pi_C + J_{MG} \quad \text{Teorema de Steiner}$$

$$\vec{r}_A - \vec{r}_O = \vec{r}_C$$

$$\vec{r}_C = R\hat{e}_2 + R\hat{e}_1 = R(\hat{e}_2 + \hat{e}_1)$$

$$\Pi_C(\hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3) = \frac{MR^2}{2} \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}$$



$$\mathbb{J}_{M_G}^{1 \rightarrow 1 \rightarrow 5 \text{ cm}} = M \begin{pmatrix} R^2 & -R^2 & 0 \\ -R^2 & R^2 & 0 \\ 0 & 0 & 2R^2 \end{pmatrix}$$

$$\mathbb{I}_0 = MR^2 \begin{pmatrix} 1/4 + 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1/2 + 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1/4 + 2 \end{pmatrix}$$

$$\mathbb{I}_0 = MR^2 \begin{pmatrix} 5/4 & -1 & 0 \\ -1 & 3/2 & 0 \\ 0 & 0 & 9/4 \end{pmatrix}$$



2)

$$\vec{r}_C = R \hat{e}_\varphi + R \hat{e}_\theta$$

$$\vec{v}_C = R \dot{\hat{e}}_\varphi + R \dot{\hat{e}}_\theta$$

$$\dot{\hat{e}}_\varphi = \dot{\varphi} \hat{k} \wedge \hat{e}_\varphi = \dot{\varphi} \hat{e}_\theta$$

$$\dot{\hat{e}}_\theta = (-\dot{\varphi} \cos \theta \hat{e}_\varphi + \dot{\varphi} \sin \theta \hat{e}_\theta - \dot{\theta} \hat{e}_\varphi) \wedge \hat{e}_\theta$$

$$\dot{\hat{e}}_\theta = \dot{\varphi} \sin \theta \hat{e}_\varphi + \dot{\theta} \hat{e}_\theta$$

$$\vec{v}_C = R \dot{\varphi} \hat{e}_\varphi + R \dot{\varphi} \sin \theta \hat{e}_\varphi + R \dot{\theta} \hat{e}_\theta$$

14/16

$$= MR^2 \begin{pmatrix} 5/4 & -1 & 0 \\ -1 & 3/2 & 0 \\ 0 & 0 & 9/4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -\dot{\varphi} \cos \theta \\ -\dot{\theta} \\ \dot{\varphi} \sin \theta \end{pmatrix}$$

$$\mathbb{I}_0 \{ \hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3 \}$$

$$\vec{\omega} = \Omega R^2 \begin{pmatrix} 5/4 & -1 & 0 \\ -1 & 3/2 & 0 \\ 0 & 0 & 9/4 \end{pmatrix}$$

$$\vec{L}_0 = \mathbb{I}_0 \vec{\omega} = MR^2 \left[\left(-\frac{5}{4} \dot{\varphi} \cos \theta + \dot{\theta} \right) \hat{e}_1 \right.$$

$$+ \left(\dot{\varphi} \cos \theta - \frac{3}{2} \dot{\theta} \right) \hat{e}_2$$

$$\left. + \frac{9}{4} \dot{\varphi} \sin \theta \hat{e}_3 \right]$$

$$\vec{L}_0 \cdot \hat{u} = \vec{L}_0 \cdot (-\cos \theta \hat{e}_1 + \sin \theta \hat{e}_3) = L_z$$

$$L_z = \left[\left(-\frac{5}{4} \dot{\varphi} \cos \theta + \dot{\theta} \right) (-\cos \theta) + \frac{9}{4} \sin^2 \theta \right] MR^2$$

$$L_z = \left[\frac{5}{4} \dot{\varphi} + \dot{\varphi} \sin^2 \theta - \dot{\theta} \cos \theta \right] MR^2$$

e) $E_{cte} \quad E = K + U$
 $\vec{\omega}_0 = 0$

$$K = \frac{1}{2} \vec{\omega} \cdot \mathbb{I}_0 \vec{\omega} \quad \mathbb{I}_0 \vec{\omega} = \vec{L}_0$$

$$K = \frac{1}{2} M R^2 \left[\left(-\frac{5}{4} \dot{\varphi} \cos \theta + \dot{\theta} \right) \left(-\dot{\varphi} \cos \theta \right) - \dot{\theta} \left(\dot{\varphi} \cos \theta - \frac{3}{2} \dot{\theta} \right) + \frac{9}{4} \dot{\varphi}^2 \sin^2 \theta \right]$$

$$K = \frac{1}{2} M R^2 \left[\frac{5}{4} \dot{\varphi}^2 + \dot{\varphi}^2 \sin^2 \theta - 2 \dot{\varphi} \dot{\theta} \cos \theta + \frac{3}{2} \dot{\theta}^2 \right]$$



$$U_g = - M g R \cos \theta$$

$$E = \frac{1}{2} M R^2 \left[\dot{\varphi}^2 \left(\frac{5}{4} + \sin^2 \theta \right) - 2 \dot{\varphi} \dot{\theta} \cos \theta + \frac{3}{2} \dot{\theta}^2 \right] - M g R \cos \theta$$