

INSTITUTO DE FÍSICA
FACULTAD DE INGENIERÍA
MECÁNICA NEWTONIANA (1122)

Curso 2025-2S

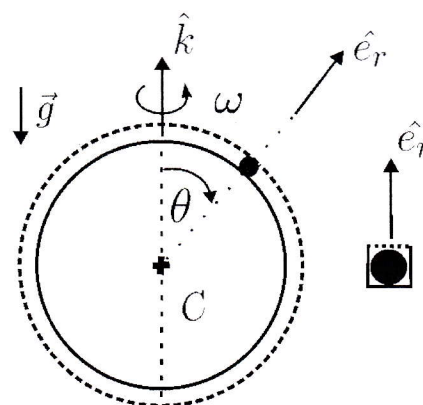
Examen: 11 de Febrero de 2026.

Duración: 4 horas.

Ejercicio N° 1:

Una partícula de masa M se encuentra apoyada en el interior de un canal con forma circular de radio R y centro C (fijo). El canal se encuentra contenido en un plano vertical. El contacto entre el canal y la partícula tiene coeficiente de rozamiento estático f_E y dinámico $f_D \approx 0$. El canal gira con velocidad angular $\vec{\omega} = \omega \hat{k}$ con $\omega^2 = g/R$ constante como indica la figura. Inicialmente la partícula se coloca en $\theta(t=0) = \theta_0 = \pi/4$ con $\dot{\theta}(t=0) = 0$.

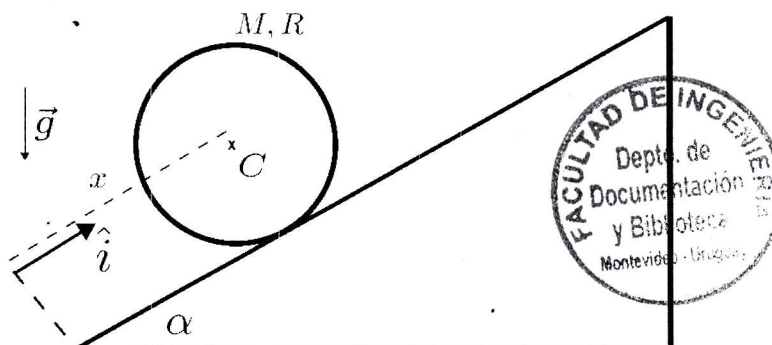
- Encuentre el mínimo valor posible de f_E para que la partícula no deslice respecto al canal en el instante inicial.
- Si la condición anterior no se cumple, encuentre la ecuación de movimiento de la partícula. Supongo que la masa no se desprende del canal.
- Encuentre la ecuación algebraica que debe cumplir el ángulo (θ_d) para el cual la partícula se desprende, saliendo del canal en la dirección radial.



Ejercicio N° 2:

Un disco homogéneo de masa M y radio R se mueve sobre un plano inclinado (de ángulo $\alpha = \pi/4$) fijo vertical como muestra la figura. Inicialmente, el disco se apoya sobre el plano (en $x(0) = 0$) con velocidad angular nula. Su centro de masa tiene velocidad inicial $\vec{v}(0) = v_0 \hat{i}$ ($v_0 > 0$). El contacto entre el plano y el disco tiene coeficientes de rozamiento estático (f_E) y dinámico (f_D).

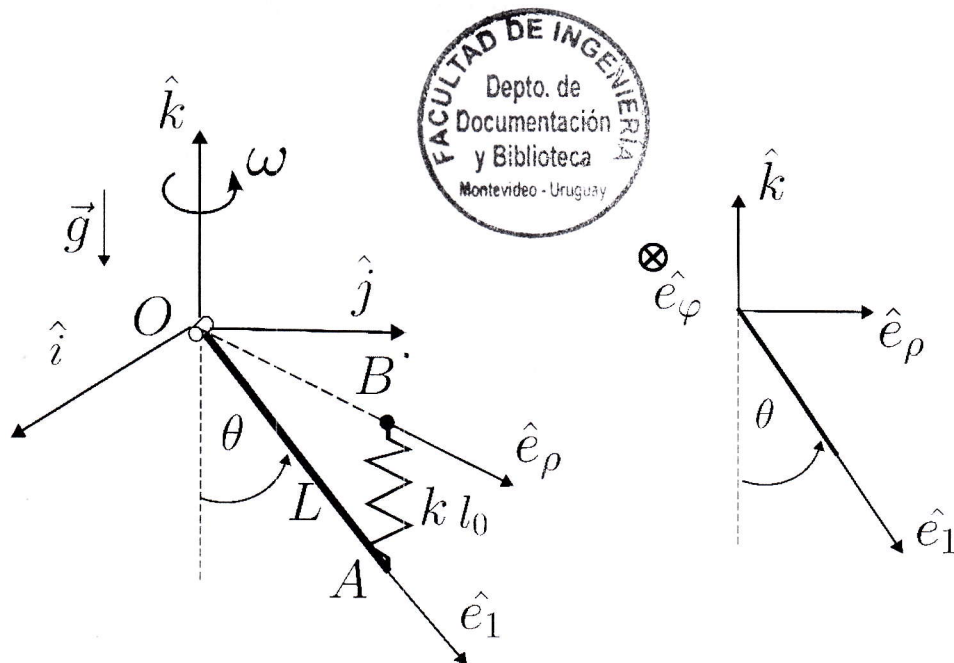
- Encuentre las ecuaciones de movimiento del disco.
- Calcule el tiempo en el que el disco comienza a rodar sin deslizar.
- Encuentre las ecuaciones de movimiento del disco una vez que comienza a rodar sin deslizar.
- Calcule el trabajo realizado por la fuerza de rozamiento entre el instante inicial y el instante en que comienza a rodar sin deslizar.

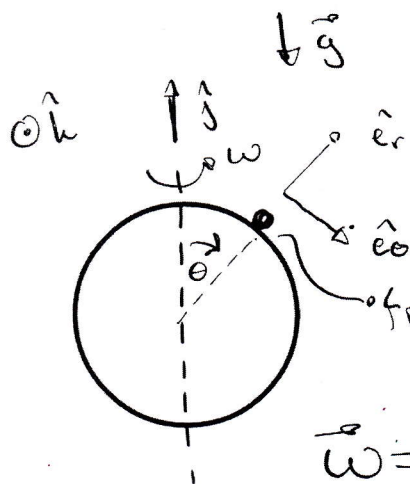


Ejercicio N° 3:

Considere el sistema de la figura formado por la barra homogénea OA de masa M y largo L . La barra OA está unida en el punto O (fijo) a un eje vertical mediante una articulación cilíndrica lisa que le permite girar libremente según un eje colineal con $\hat{e}_\varphi$ y permanece en el plano vertical $O\hat{k}, \hat{e}_\rho$. La articulación está conectada a un motor que la hace rotar con velocidad angular $\vec{\omega} = \omega\hat{k}$ con ω constante. El otro extremo de la barra A , está unido a un resorte de constante elástica k y longitud natural nula ($l_0 = 0$) cuyo otro extremo (el punto B) se mueve sobre el plano horizontal $O\hat{i}, \hat{j}$, de tal forma de que el segmento AB es siempre vertical. La barra forma un ángulo θ con la vertical como se indica en la figura.

- Escriba el momento angular de la barra respecto al punto O .
- Escriba la o las ecuaciones de movimiento para la barra.
- Encuentre los puntos de equilibrio relativos de la barra y estudie su estabilidad en función de los parámetros del sistema.

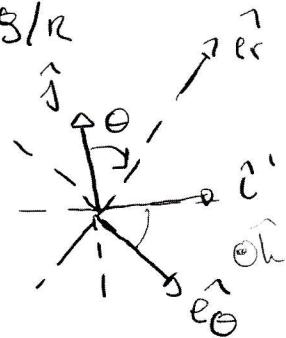




$$\vec{r} = R \hat{e}_r$$

$$\vec{v} = R \dot{\hat{e}}_r$$

$$\omega^2 = g/R$$



$$\vec{\omega} = \omega \hat{j} - \dot{\theta} \hat{k}$$

$$\vec{\omega} = \omega \cos \theta \hat{e}_r - \omega \sin \theta \hat{e}_\theta - \dot{\theta} \hat{k}$$

$$\hat{j} = \cos \theta \hat{e}_r - \sin \theta \hat{e}_\theta$$

$$\hat{k} = \cos \theta \hat{e}_\theta + \sin \theta \hat{e}_r$$

$$\dot{\hat{e}}_r = \vec{\omega} \wedge \hat{e}_r = -\omega \sin \theta \hat{k} + \dot{\theta} \hat{e}_\theta$$

$$\dot{\hat{e}}_\theta = \vec{\omega} \wedge \hat{e}_\theta = -\omega \cos \theta \hat{k} - \dot{\theta} \hat{e}_r$$

$$\dot{\hat{k}} = \vec{\omega} \wedge \hat{k} = \omega \cos \theta \hat{e}_\theta + \omega \sin \theta \hat{e}_r$$

$$\vec{v} = R (-\omega \sin \theta \hat{k} + \dot{\theta} \hat{e}_\theta)$$

$$\vec{a} = -R \omega \dot{\theta} \cos \theta \hat{k} + R \ddot{\theta} \hat{e}_\theta - R \omega \sin \theta \dot{\hat{k}} + R \dot{\theta} \dot{\hat{e}}_\theta$$

$$\vec{a} = -R \omega \dot{\theta} \cos \theta \hat{k} + R \ddot{\theta} \hat{e}_\theta - R \omega \sin \theta (\omega \cos \theta \hat{e}_\theta + \omega \sin \theta \hat{e}_r) + R \dot{\theta} (-\omega \cos \theta \hat{k} - \dot{\theta} \hat{e}_r)$$

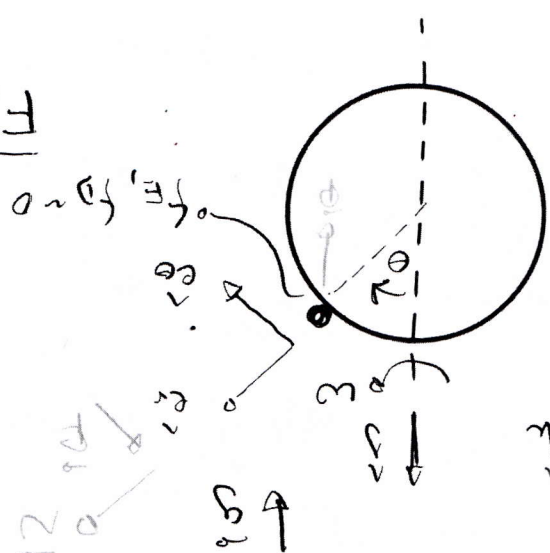
$$\vec{a} = (R \ddot{\theta} - R \omega^2 \sin \theta \cos \theta) \hat{e}_\theta - [R \omega^2 \sin^2 \theta + R \dot{\theta}^2] \hat{e}_r - 2R \omega \dot{\theta} \cos \theta \hat{k}$$



Vinencia
Fuerza Neta $\vec{F}_n$

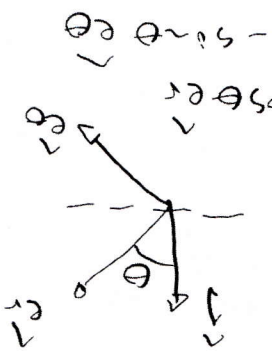
$$\vec{F}_n = N_r \hat{e}_r + N_\theta \hat{e}_\theta - F \hat{e}_\theta - M g \hat{j}$$

$$\vec{F}_n = (N_r - M g \cos \theta) \hat{e}_r - (F - M g \sin \theta) \hat{e}_\theta + N_\theta \hat{e}_\theta$$



$$\begin{aligned} \text{a) } M(2\ddot{\theta} - R\omega^2 \sin \theta \cos \theta) &= -(F - M g \sin \theta) \\ \text{b) } -M(R\omega^2 \sin^2 \theta + R\ddot{\theta}^2) &= N_r - M g \cos \theta \\ \text{c) } -M 2R\omega \dot{\theta} \cos \theta &= N_\theta \end{aligned}$$

Punto de equilibrio relativo



Sea $\theta_0 = \frac{\pi}{4} + q$, $\dot{\theta}(\theta_0) = 0$, $\ddot{\theta}(\theta_0) = 0$, $N_3 = 0$

$$-M R \omega^2 \sin \theta \cos \theta = -F + M g \sin \theta$$

$$F = M R \omega^2 \sin \theta \cos \theta + M g \sin \theta = M g \sin \theta (\cos \theta + 1)$$

$$N_r = M g \cos \theta - M R \omega^2 \sin^2 \theta = M g (\cos \theta - \sin^2 \theta)$$

$$|\vec{F}| \leq F_e |\vec{N}_r| \rightarrow |\vec{F}| \leq F_e |\vec{N}_r|$$

$$\theta_0 = \pi/4 \quad \sin \pi/4 = 1/\sqrt{2} = \cos \pi/4$$

$$|\sin \theta_0 (\cos \theta_0 + 1)| \leq F_e \rightarrow \left| \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} + 1 \right) \right| \leq F_e \rightarrow \left| \frac{1}{\sqrt{2}} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}} \right) \right| \leq F_e$$

9/15

desliza. La 2da ley de Newton no cambia pero $|\vec{F}| = \mu |\vec{N}|$ y como $\mu \dot{x} = 0 \Rightarrow F_{\dot{x}} = 0$

Usamos $F_{\dot{x}} = 0$ en la 2da ley de Newton

$$\left. \begin{array}{l} \text{suponido } N \neq 0 \\ \text{(No desliza)} \end{array} \right\} \begin{aligned} M g \sin \theta &= M (R \omega^2 \sin^2 \theta + R \ddot{\theta}^2) = \dot{N} - \mu g \cos \theta \end{aligned}$$

$$\dot{N} - M R \omega \cos \theta = N_3$$

$$\boxed{F_{\text{ro de movimiento}} = \ddot{\theta} - g \sin \theta - \omega^2 R \sin \theta \cos \theta = 0}$$

$$F_{\text{fuerza Normal}} = N = M [g \cos \theta - R \omega^2 \sin^2 \theta - R \ddot{\theta}^2]$$

$$R \left[\ddot{\theta} + g \cos \theta - \omega^2 R \sin^2 \theta \right] = 0$$

$$\ddot{\theta} + g \left(\cos \theta - \cos \theta_0 \right) - \omega^2 \left(\sin^2 \theta - \sin^2 \theta_0 \right) = 0$$

$$\ddot{\theta} + g \left(\cos \theta - \frac{1}{2} \right) - \frac{g}{2} \left(\sin^2 \theta - \frac{1}{2} \right) = 0$$

$$\ddot{\theta} + g \left[\cos \theta - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{4} \right] = 0$$

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{2} \left[-\cos \theta + \sin^2 \theta - \left(-\frac{1}{4} - \frac{1}{4} \right) \right] = 0$$



5/15

6/15



$$3 \cos \theta_1 + 2 \cos^2 \theta_2 = (\sqrt{2} + \frac{3}{2})$$

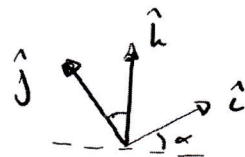
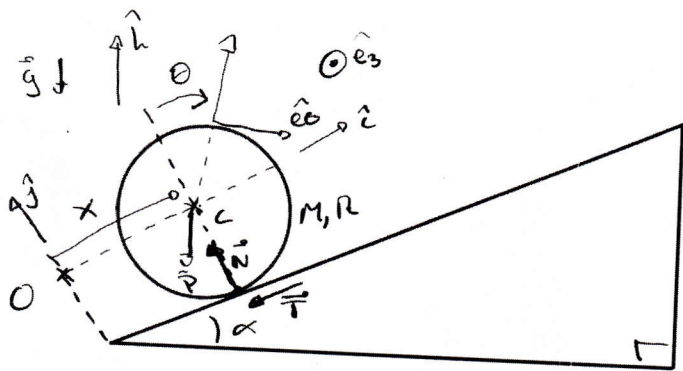
$$\begin{aligned} \downarrow & \quad 1 - \cos^2 \theta_2 \\ N_1 = 0 & \rightarrow 3 \cos \theta_1 - 2 \sin^2 \theta_2 = (\sqrt{2} - \frac{1}{2}) \end{aligned}$$

$$N_1 = Mg \left[3 \cos \theta - \sin^2 \theta + \left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} \right) \right] > 0$$

$$N_1 = M \left[g \cos \theta - R \omega^2 \sin^2 \theta - 2g \left(-\cos \theta + \sin^2 \theta - \left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} \right) \right) \right]$$

$$N_1 = M \left[g \cos \theta - R \omega^2 \sin^2 \theta - R \omega^2 \right]$$

2]



$$\hat{h} = \cos \alpha \hat{j} + \sin \alpha \hat{z}$$

$$\hat{h} = \frac{1}{\sqrt{2}} \hat{z} + \frac{1}{\sqrt{2}} \hat{j}$$

$$\vec{\omega}_{\text{Disco}} = -\dot{\Theta} \hat{e}_3$$

a) En el instante inicial $\vec{v}_C = v_0 \hat{z}$ $\dot{\Theta}(0) = 0$

$$\vec{v}_P^{\text{Disco}} = \vec{v}_C + \vec{\omega}_D \wedge (\vec{r}_P - \vec{r}_C) \quad \text{Distribución de velocidades;}$$

$$\vec{r}_P - \vec{r}_C = -R \hat{j}$$

$$\vec{v}_P^{\text{Disco}}(t=0) = \vec{v}_C(0) + (-\dot{\Theta}(0) \hat{e}_3) \wedge (-R \hat{j})$$

$$\left. \begin{array}{l} \vec{v}_P^{\text{Disco}}(t=0) = v_0 \hat{z} \\ \vec{v}_P^{\text{placa}} = 0 \end{array} \right\} \rightarrow \text{Inicialmente desliza}$$

1^{ra} Cardinal $\vec{R}^{\text{ext}} = M \vec{a}_C$

$$\vec{r}_C = x \hat{z}$$

$$\vec{v}_C = \dot{x} \hat{z}$$

$$\vec{a}_C = \ddot{x} \hat{z}$$

$$\vec{R}^{\text{ext}} = \vec{P} + \vec{N} + \vec{T}$$

$$\vec{P} = -Mg \hat{h} = -\frac{Mg}{\sqrt{2}} (\hat{z} + \hat{j})$$

$$\vec{N} = N \hat{j} \quad N > 0$$

$$\vec{T} = -T \hat{z} = -f_0 |\vec{N}| \hat{z} \quad \text{por rozamiento dinámico}$$



$$M \ddot{x} \hat{z} = \left(-T - \frac{Mg}{\sqrt{2}}\right) \hat{z} + \left(N - \frac{Mg}{\sqrt{2}}\right) \hat{j} \rightarrow -T - \frac{Mg}{\sqrt{2}} = M \ddot{x}$$

$$M \ddot{x} \hat{z} = (-$$

$$N = \frac{Mg}{\sqrt{2}} \rightarrow \boxed{T = f_0 \frac{Mg}{\sqrt{2}}}$$

$$\frac{Mg}{\sqrt{2}} (-f_0 - 1) = M \ddot{x} \rightarrow \ddot{x} = -\frac{g}{\sqrt{2}} (1 + f_0)$$

2^{da} Cardinal en C (el centro de masa) $\frac{d\vec{L}_C}{dt} = \vec{M}_C^{\text{ext}}$

$$\vec{L}_C = \vec{I}_C \vec{\omega}_D = -\frac{MR^2}{2} \dot{\Theta} \hat{e}_3$$

$$\vec{M}_C^{\text{ext}} = -RT \hat{e}_3$$

$$\frac{d\vec{L}_C}{dt} = -\frac{MR^2}{2} \ddot{\Theta} \hat{e}_3$$

$$\Rightarrow \frac{MR^2}{2} \ddot{\Theta} = RT \rightarrow \ddot{\Theta} = \frac{2T}{MR}$$

7/15

$$\left| \ddot{\theta} = \frac{g}{l} \sin \theta \right| \quad \left| \ddot{x} = -\frac{g}{l} (1 + f_0) \right|$$

Condiciones Iniciales:

$$\dot{\theta}(0) = 0 \quad \dot{x}(0) = v_0$$

$$\dot{\theta}(t) = \frac{g}{l} t \quad \dot{x} = v_0 - \frac{g}{l} (1 + f_0) t$$

$\dot{\theta}$ crece con t $\dot{x}$ decrece con t

b) Para que quede sin deslizarse: $v_{p\text{ disco}} = 0$

$$v_p^{\text{disco}} = \dot{x} r - \dot{\theta} r = 0 \Rightarrow \dot{x} = \dot{\theta} \Rightarrow \dot{x} r - \dot{\theta} r = 0 \Rightarrow \dot{x} = \dot{\theta}$$

$\Rightarrow$ RSD si $\dot{x} = R \dot{\theta}$ como $\dot{x}(t)$ y $\dot{\theta}(t)$ f_{RSD} es tal

que $\dot{x}(t_{RSD}) = R \dot{\theta}(t_{RSD})$ si existe.

$$\dot{x}(t_{RSD}) = v_0 - \frac{g}{l} (1 + f_0) t_{RSD} \quad \dot{\theta}(t_{RSD}) = \frac{g}{l} t_{RSD}$$

$$\Rightarrow v_0 - \frac{g}{l} (1 + f_0) t_{RSD} = \frac{g}{l} t_{RSD} \Rightarrow v_0 = \frac{g}{l} (1 + 3f_0) t_{RSD}$$

$$t_{RSD} = \frac{v_0}{\frac{g}{l} (1 + f_0) + \frac{g}{l} f_0}$$

$$t_{RSD} = \frac{\sqrt{2} v_0}{g(1 + 3f_0)}$$

entre 0 y t_{RSD} el disco
para $t \geq t_{RSD}$ el disco
RSD

c) Como RSD $\dot{x}(t) = R \dot{\theta}(t)$ $t \geq t_{RSD}$ ahora $\dot{x}$ y $\dot{\theta}$ no son
independientes

$|T| \leq |N|$ ahora tenemos RSD en todo el tiempo

Las cardinales no cambian:

$$\ddot{\theta} = \frac{g}{l} \quad \ddot{x} = -\frac{g}{l} (1 + 3f_0)$$

$$\dot{x} = R \dot{\theta}$$

$$M \ddot{x} = -T - \frac{Mg}{2}$$

$$\ddot{x} = \frac{2}{M} \quad M \ddot{x} = -M \frac{x}{2} - \frac{Mg}{2} \Rightarrow \ddot{x} = -\frac{x}{2} - \frac{g}{2} \quad \ddot{x} = -\frac{\sqrt{2}g}{2}$$



$$\theta = -\frac{12}{3} \frac{g}{R} \quad x \text{ y } \dot{\theta} \text{ disminuyen}$$

d) El trabajo de la fuerza de rozamiento entre $t=0$ y $t=t_{\text{res}}$

$$T = -f_0 \frac{Mg}{\sqrt{2}} \cdot \theta_{\text{final}} \quad T = \frac{1}{2} \cdot \vec{v} \cdot \vec{v} + M_T \cdot \vec{\omega} \cdot \vec{\omega}$$

$$\vec{v}_1 = x \cdot \vec{e}_1$$

$$M_T = -R \hat{j} \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \right)$$

$$= R f_0 \frac{Mg}{\sqrt{2}} (-e_3)$$

$$\vec{\omega}_0 = -\dot{\theta} \cdot \vec{e}_3$$

$$\dot{\theta}(t) = \frac{R}{g} \sqrt{2} f_0 t$$

$$x = v_0 - \frac{g}{\sqrt{2}} (1+f_0) t$$

$$\dot{R} = Mg \sqrt{2} \left[-v_0 + \frac{g}{\sqrt{2}} (1+3f_0) t \right]$$

$$W_T = \int_{t_{\text{res}}}^0 \dot{R} dt = Mg \sqrt{2} \left[-v_0 t_{\text{res}} + \frac{g}{\sqrt{2}} (1+3f_0) \frac{t_{\text{res}}^2}{2} \right]$$

$$W_T = Mg \sqrt{2} \left[-\frac{\sqrt{2} v_0^2}{2} + \frac{1}{2} (1+3f_0) \frac{v_0^2}{g^2} \right]$$

$$= Mg \frac{v_0^2}{2} \sqrt{2} \left[-2 + 1 \right]$$

$$W_T = -M \frac{2}{(1+3f_0)} \frac{v_0^2}{2}$$

Otra forma: $W_T = E_{\text{res}} - E_0$

$$E_0 = \frac{1}{2} M v_0^2$$

$$E_{\text{res}} = \frac{1}{2} M \dot{x}^2 + \frac{1}{2} M R^2 \dot{\theta}^2 + Mg x_{\text{res}} \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \dot{x}_{\text{res}} = R \dot{\theta}_{\text{res}}$$

$$= \frac{1}{2} M \frac{3}{2} \dot{x}_{\text{res}}^2 + \frac{1}{2} M g x_{\text{res}}$$

9/15



$$\dot{x} = v_0 - \frac{g}{\sqrt{2}}(1+f_D)t \rightarrow x(t) = v_0 t - \frac{g}{2\sqrt{2}}(1+f_D)t^2$$

$$x_{RSD} = v_0 t_{RSD} - \frac{g}{2\sqrt{2}}(1+f_D)t_{RSD}^2$$

$$= \frac{\sqrt{2} v_0^2}{(1+3f_D)g} - \frac{1}{\sqrt{2}}(1+f_D) \frac{v_0^2}{(1+3f_D)^2 g}$$

$$x_{RSD} = \frac{v_0^2}{\sqrt{2}(1+3f_D)g} \left[2 - \frac{(1+f_D)}{1+3f_D} \right]$$

$$x_{RSD} = \frac{v_0^2}{\sqrt{2}(1+3f_D)^2 g} (1+5f_D)$$



$$\dot{x}_{RSD} = v_0 - \frac{v_0(1+f_D)}{(1+3f_D)} = \frac{v_0}{(1+3f_D)} 2f_D$$

$$E_{RSD} = \frac{3}{4} M \frac{v_0^2 4f_D^2}{(1+3f_D)^2} + \frac{Mg}{\sqrt{2}} \frac{v_0^2}{\sqrt{2}g(1+3f_D)^2(1+5f_D)}$$

$$= \frac{M v_0^2}{(1+3f_D)^2} \left[3f_D^2 + \frac{1}{2}(1+5f_D) \right]$$

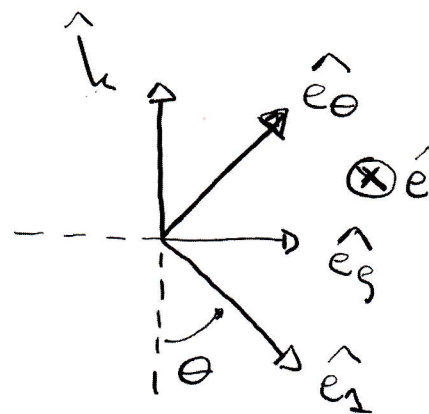
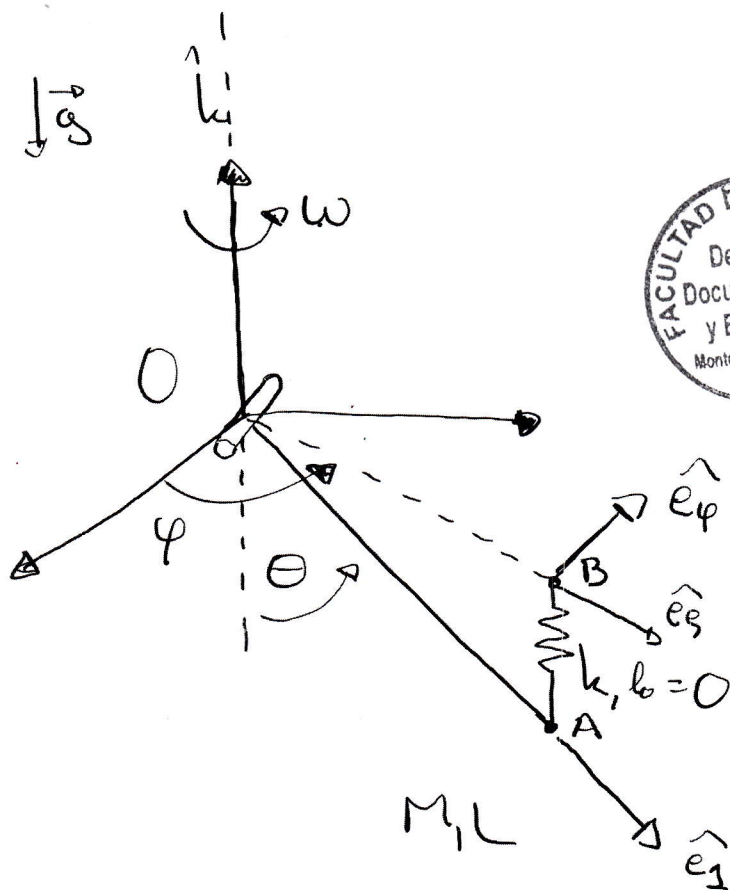
$$W_I^* = \frac{M v_0^2}{2(1+3f_D)^2} [6f_D^2 + 1 + 5f_D] - \frac{M v_0^2}{2}$$

$$W_I^* = \frac{M v_0^2}{2(1+3f_D)^2} \left[\underbrace{6f_D^2 + 1 + 5f_D - 1 - 6f_D - 9f_D^2}_{[-3f_D^2 - f_D]} \right]$$

$$W_I^* = - \frac{M v_0^2 f_D}{2(1+3f_D)}$$

El mismo resultado

13



$$\hat{k} = -\hat{e}_2 \cos \theta + \hat{e}_1 \sin \theta$$

$$\vec{\omega} = \omega \hat{k} - \dot{\theta} \hat{e}_\varphi$$

$$l_0 = 0$$

$$\vec{\omega} = -\omega \cos \theta \hat{e}_1 + \omega \sin \theta \hat{e}_\theta - \dot{\theta} \hat{e}_\varphi$$

$$a) \vec{L}_O = \Pi_O \vec{\omega}$$

$$\Pi_O \{\hat{e}_1, \hat{e}_\theta, \hat{e}_\varphi\} = \frac{ML^2}{3} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\vec{L}_O = \frac{ML^2}{3} (\omega \sin \theta \hat{e}_\theta - \dot{\theta} \hat{e}_\varphi)$$

b) 2^{da} Cardinal en O

$$\frac{d\vec{L}_O}{dt} = \vec{M}_O^{\text{ext}}$$

$$\frac{d\vec{L}_O}{dt} = \frac{ML^2}{3} [\omega \dot{\theta} \cos \theta \hat{e}_\theta + \omega \sin \theta \dot{\hat{e}}_\theta - \ddot{\theta} \hat{e}_\varphi - \dot{\theta} \dot{\hat{e}}_\varphi]$$

$$\dot{\vec{w}} = -w \cos \theta \hat{e}_1 + w \sin \theta \hat{e}_2 - \dot{\theta} \hat{e}_\theta$$

$$\dot{\hat{e}}_\theta = \dot{\vec{w}} \wedge \hat{e}_\theta = +w \cos \theta \hat{e}_\phi - \dot{\theta} \hat{e}_1$$

$$\dot{\hat{e}}_\phi = \dot{\vec{w}} \wedge \hat{e}_\phi = -w \cos \theta \hat{e}_\theta - w \sin \theta \hat{e}_1$$

$$\frac{d\vec{L}_0}{dt} = \frac{ML^2}{3} \left[w \dot{\theta} \cos \theta \hat{e}_\theta + w \sin \theta (\dot{\theta} \hat{e}_1 - \dot{\phi} \hat{e}_\phi) - \dot{\theta} \hat{e}_\theta - \dot{\phi} (-w \cos \theta \hat{e}_\theta - w \sin \theta \hat{e}_1) \right]$$

$$\frac{d\vec{L}_0}{dt} = \frac{ML^2}{3} \left[2w \dot{\theta} \cos \theta \hat{e}_\theta + (w^2 \sin \theta \cos \theta - \dot{\theta}^2) \hat{e}_1 \right]$$

Momentos de Fuerza $\vec{M}_0^{ext} = \vec{M}_0^{Activas} + \vec{M}_0^{react}$

Fuerzas $\vec{P}eso = -M \vec{g} \hat{k} = M g \cos \theta \hat{e}_1 - M g \sin \theta \hat{e}_2$

$$\vec{F}_D = L \cos \theta \hat{k}$$



$$\vec{M}_0^{ext} = \vec{L} \wedge \hat{e}_1 (M g \cos \theta \hat{e}_1 - M g \sin \theta \hat{e}_2)$$

$$+ \vec{L} \wedge L \cos \theta (-\cos \theta \hat{e}_1 + \sin \theta \hat{e}_2) + \vec{M}_0^{react}$$

$$\vec{M}_0^{ext} = + \frac{ML^2}{3} \sin \theta \hat{e}_1 - L \cos \theta \sin \theta \hat{e}_2 + \vec{M}_0^{react}$$

12/15

$$\vec{M}_{\text{react}} = M_1 \vec{e}_1 + M_2 \vec{e}_2$$

por ser articulación cilíndrica lisa.

2da Cardinal:

$$\frac{M L^2}{3} 2 \omega \dot{\theta} \cos \theta = M_2$$

$$\frac{M L^2}{3} [\omega^2 \sin \theta \cos \theta - \ddot{\theta}] =$$

$$= M g L^2 \sin \theta - k L^2 \sin \theta \cos \theta$$

ec. de movimiento



$$\omega^2 \sin \theta \cos \theta - \frac{2}{3} g L \sin \theta + 3 k \frac{L}{M} \sin \theta \cos \theta - \ddot{\theta} = 0$$

$$\ddot{\theta} + \sin \theta \left[\frac{2}{3} g L - \left(3 k \frac{L}{M} + \omega^2 \right) \cos \theta \right] = 0$$

puntos de equilibrio la ec. es $\ddot{\theta} + f(\theta) = 0$

los pto de equilibrio cumplen $f(\theta_{eq}) = 0$ y si:

$$\left. \frac{df}{d\theta} \right|_{\theta_{eq}} > 0 \text{ es un punto estable}$$

$$\left. \frac{df}{d\theta} \right|_{\theta_{eq}} < 0 \text{ Inestable}$$

13/15

$$f(\theta) = \sin \theta \left[\frac{2}{3} \frac{L}{g} - \left(\frac{M}{3k} + \omega^2 \right) \cos \theta \right]$$

$$f(\theta) = 0 \quad \text{at} \quad \theta_1 = 0$$

$$\theta_2 = \pi$$

$$\cos \theta_3 = \frac{\frac{2}{3} \frac{L}{g}}{\frac{M}{3k} + \omega^2}$$

exists if:

$$\frac{2}{3} \frac{L}{g} < \frac{M}{3k} + \omega^2$$

$$\frac{df(\theta)}{d\theta} = \cos \theta \left[\frac{2}{3} \frac{L}{g} - \left(\frac{M}{3k} + \omega^2 \right) \cos \theta \right] + \sin \theta \left(\frac{M}{3k} + \omega^2 \right)$$

$$\theta_1 = 0 \quad \left. \frac{df(\theta)}{d\theta} \right|_{\theta_1=0} = \frac{2}{3} \frac{L}{g} - \left(\frac{M}{3k} + \omega^2 \right) > 0 \quad \text{if} \quad \frac{2}{3} \frac{L}{g} > \left(\frac{M}{3k} + \omega^2 \right)$$

$$\theta_1 \text{ es estable si } \frac{2}{3} \frac{L}{g} > \left(\frac{M}{3k} + \omega^2 \right)$$

$$\theta_2 = \pi \quad \left. \frac{df(\theta)}{d\theta} \right|_{\theta_2} = -1 \left[\frac{2}{3} \frac{L}{g} + \left(\frac{M}{3k} + \omega^2 \right) \right] < 0$$

θ_2 inestable siempre.

$$\theta_3 \text{ f.g. } \cos \theta_3 = \frac{\frac{2}{3} \frac{L}{g}}{\frac{M}{3k} + \omega^2}$$

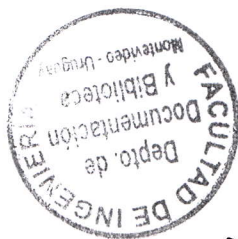
$$\left. \frac{df(\theta)}{d\theta} \right|_{\theta_3} = \cos \theta_3 \left[\frac{2}{3} \frac{L}{g} - \left(\frac{M}{3k} + \omega^2 \right) \cos \theta_3 \right] + \sin \theta_3 \left(\frac{M}{3k} + \omega^2 \right) > 0$$



θ_3 si existe es estable.

14/15

15/15



si

$$\frac{3}{2} \frac{g}{L} < \frac{3k}{M} + \omega^2$$

$\Rightarrow \theta_1 = 0$ es inestable

θ_3 Existe y es estable

$\theta_2 = \pi$ es inestable

si

$$\frac{3}{2} \frac{g}{L} > \frac{3k}{M} + \omega^2$$

$\Rightarrow \theta_1 = 0$ es estable

$\theta_2 = \pi$ es inestable

θ_3 No existe