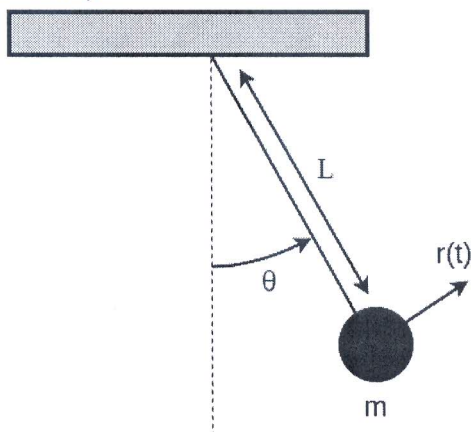


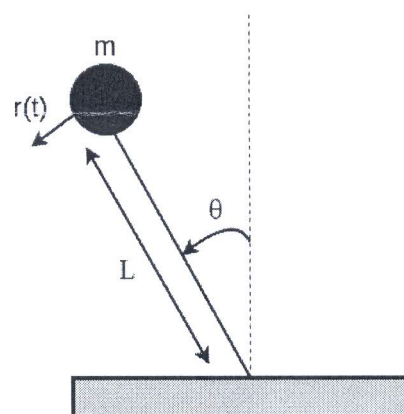
Carrera:	INGENIERÍA ELÉCTRICA		Instituto de Ingeniería Eléctrica
Materia:	CONTROL		Departamento de Sistemas y Control
Asignatura:	SISTEMAS Y CONTROL		
Plan:	97		
Fecha:	09/12/2021		PERÍODO: DICIEMBRE 2021

Problema 1

Se estudiarán los dos sistemas físicos de las figuras 1a y 1b, en los que un péndulo simple y un péndulo invertido, respectivamente, son controlados a través de una fuerza tangencial a la dirección de movimiento. En cada sistema, el largo del péndulo es L , la masa es m , y existe un rozamiento viscoso con el aire de valor b . La fuerza r que controla al sistema tiene la convención de signos que se indica en la figura (positiva en el sentido que en el que θ aumenta).



1a) péndulo simple



1b) péndulo invertido

Se pide:

- 1) Hallar una representación en variables de estado de **cada sistema**, tomando como salida la posición del péndulo θ y como entrada la fuerza de control r .
- 2) Para **cada sistema**: linealizar respecto a $\theta=0$, hallar una representación en variables de estado, dibujar un diagrama de bloques utilizando solamente bloques proporcionales, sumadores e integradores, y hallar una función de transferencia de la forma $\theta(s)/R(s)$. Dibujar el patrón de ceros y polos de cada función de transferencia. ¿Cómo espera que evolucione la respuesta linealizada con respecto a la no linealizada, en cada uno de los dos casos, partiendo del reposo desde $\theta=\varepsilon>0$ con entrada r idénticamente nula?

De ahora en más se considera exclusivamente el sistema correspondiente al péndulo invertido. Se pretende controlar el sistema con un controlador serie proporcional, de ganancia k , y realimentación unitaria.

- 3) Dibuje el lugar de las raíces del sistema realimentado paramétrico en $k>0$. ¿Qué condición se debe cumplir para que sea posible controlar la posición del péndulo en un entorno de $\theta=0$?

Para las siguientes partes se tiene: $m = 0,2 \text{ kg}$, $b = 0,5 \text{ N/(m/s)}$, $L = 0,3 \text{ m}$, $g = 9,8 \text{ m/s}^2$

- 4) Determinar k de forma tal que el sistema realimentado resulte críticamente amortiguamiento.
- 5) ¿Ante un escalón de entrada de $0,1 \text{ rad}$, cuál es el valor en régimen que predice el modelo lineal para el sistema realimentado? ¿Cuál es el verdadero valor en régimen para el sistema no lineal?

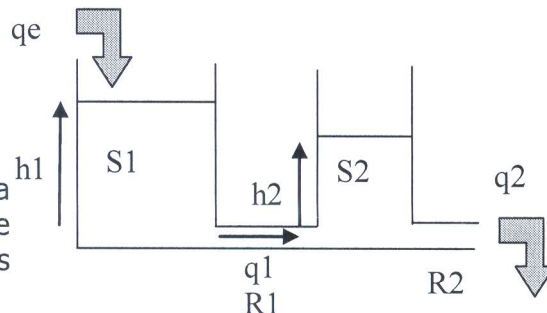
Carrera:	INGENIERIA ELÉCTRICA	Instituto de Ingeniería Eléctrica
Materia:	CONTROL	Departamento de Sistemas y Control
Asignatura:	SISTEMAS Y CONTROL	PERÍODO: DICIEMBRE 2021
Plan:	97	
Fecha:	09/12/2021	



Problema 2

La figura muestra un sistema de dos tanques de agua, de secciones S_1 y S_2 , con altura instantánea de líquido h_1 y h_2 respectivamente. Ambos tanques se encuentran interconectados a través de una cañería de resistencia hidráulica R_1 . Al primer tanque ingresa un caudal q_e de fluido. El segundo tanque descarga un caudal q_2 a la atmósfera a través de una cañería de resistencia hidráulica R_2 .

Considere el sistema con entrada q_e , y salida q_2 .

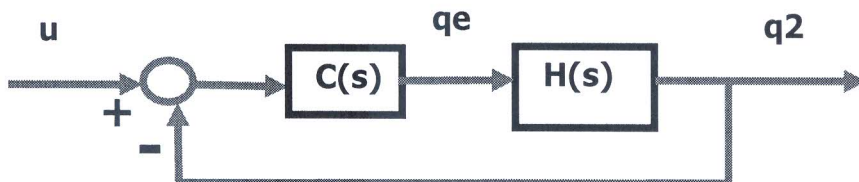


1) Encuentre un modelo en variables de estado para este sistema. Dibuje un diagrama de bloques de este sistema en el que aparezcan explícitamente las variables de interés q_e , q_1 , q_2 , h_1 , h_2 .

2) Calcule la función de transferencia $H(s) = Q_2(s)/Q_e(s)$

De ahora en adelante considere: $S_1 = S_2 = 1 \text{ m}^2$, $R_1 = 1/2 \text{ s/m}^2$, $R_2 = 1/4 \text{ s/m}^2$
(las resistencias hidráulicas están dadas para presiones medidas en alturas piezométricas)

3) Se desea controlar el sistema midiendo q_2 y usando como entrada controlada q_e . El objetivo de control es mantener regulada la salida q_2 . Para ello se usa un controlador $C(s)$ en serie con la planta y realimentación unitaria.



- Si el controlador es proporcional $C(s) = k$. ¿Cuál es el menor tiempo de asentamiento posible?
- Determine el valor de k para obtener este tiempo de asentamiento, sin sobretiro.
- Discuta la estabilidad del sistema realimentado en función de k .

4) Se desea que el error asintótico de la respuesta a escalón del sistema controlado sea nulo y no presente comportamiento oscilatorio.

4.a) Encuentre un controlador con la estructura más sencilla posible que logre este objetivo. Entre las posibles soluciones, elija aquella con menor tiempo de asentamiento posible. Justifique.

4.b) Desde el punto de vista de la respuesta a escalón ¿qué ventajas y desventajas se obtienen con este controlador en comparación con el calculado en la parte 3?

4.c) Usando este controlador, ¿cuánto es el error asintótico a la rampa?

Solución del problema 1



- 1) $mL^2\ddot{\theta}(t) = r(t)L - mgL\sin(\theta) - bL^2\dot{\theta}$ sale de aplicar torques en el péndulo simple. Para el caso de péndulo invertido, la ecuación resulta

$$mL^2\ddot{\theta}(t) = r(t)L + mgL\sin(\theta) - bL^2\dot{\theta}$$

Definiendo como variables de estado $x = [\theta, \dot{\theta}]$, se llega a la representación:

$$\begin{bmatrix} \dot{\theta} \\ \ddot{\theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{g}{L} & -\frac{b}{m} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{mL} \end{bmatrix} r$$

$$\begin{bmatrix} \theta \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} r$$

- 2) Imponiendo $\sin(\theta) \approx \theta$, la transferencia resulta $H = \frac{1/mL}{s^2 + (b/m)s + g/L}$ para el péndulo simple y $H = \frac{1/mL}{s^2 + (b/m)s - g/L}$ para el invertido.

La representación en diagrama de bloques para el péndulo simple/invertido es:

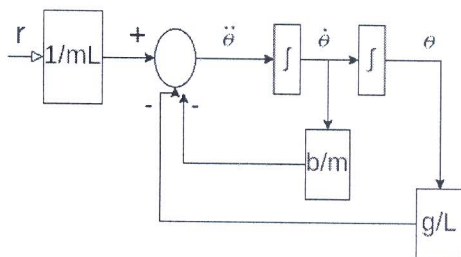


Diagrama de bloques del péndulo simple.

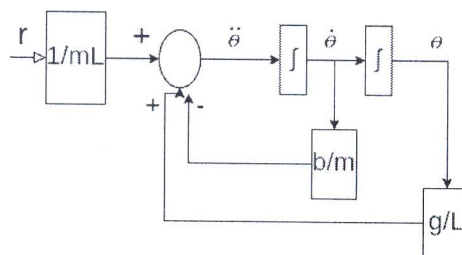


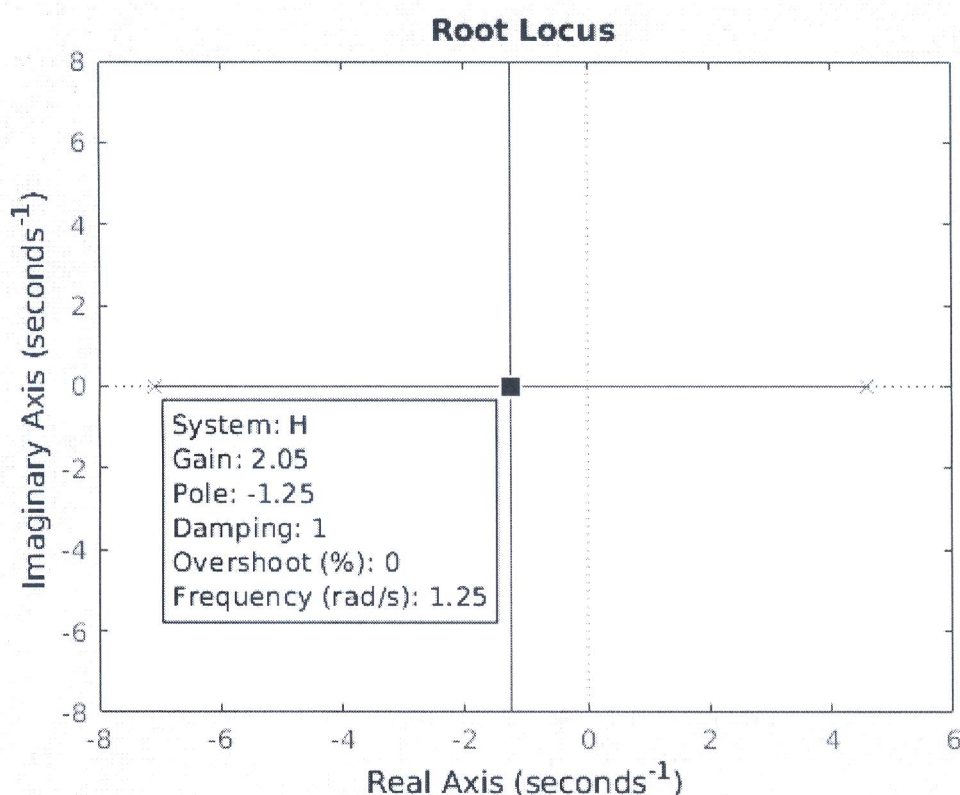
Diagrama de bloques del péndulo invertido

Para el péndulo simple los polos resultan $\frac{-b/m \pm \sqrt{(b/m)^2 - 4g/L}}{2}$. Ya que el discriminante es necesariamente menor que el cuadrado de b/m , incluso en el caso en que el discriminante resulta positivo, las dos raíces reales resultantes son negativas. Más aún, en el caso más usual, el discriminante es negativo, su raíz compleja por lo que el sistema tendrá polos complejos conjugados que tendrán por parte real $-b/m$.

Los polos son $\frac{-b/m \pm \sqrt{(b/m)^2 + 4g/L}}{2}$ para el péndulo invertido. Notar que como el discriminante siempre es mayor que el cuadrado de b/m , por lo que esto resulta obligatoriamente en un polo negativo y uno positivo.

Como el péndulo invertido cuenta con un polo positivo, cualquier apartamiento del equilibrio hace que la salida crezca exponencialmente y saca al sistema del rango de la linealización, por lo que la linealización deja de describir adecuadamente el movimiento posterior.

3)



Se debe cumplir que el punto medio de los polos sea negativo para que exista *algún* control estabilizante, pero esto se cumple trivialmente ya que el punto medio es $-b/2mL$. Sin embargo, mientras menor resulte el valor del cociente b/mL , más ganancia es necesaria para que el polo derecho entre al semiplano izquierdo.

En particular, la ganancia necesaria para que el sistema tenga todos sus polos negativos es $k > mg$. Esto se ve de lograr que el denominador de $G_{cl} = \frac{kH}{1+kH} = \frac{k/mL}{s^2 + (b/mL)s - g/L + k/mL}$ tenga exclusivamente coeficientes positivos.

Para dibujar el Root Locus basta notar que el intervalo entre los polos pertenece al LGP, y que el punto múltiple se da en $-b/2m$

4) Con los valores numéricos, la transferencia en lazo abierto resulta $H = \frac{16.67}{s^2 + 2.5s - 32.67}$

Para el sistema realimentado, tenemos $G = \frac{kH}{1+kH} = \frac{16.67k}{s^2 + 2.5s - 32.67 + 16.67k}$.

El sistema realimentado tiene por polos $\frac{-2.5 \pm \sqrt{(2.5)^2 - 4(-32.67 + 16.67k)}}{2}$, por lo que la

condición de amortiguación crítica es $2.5^2 - 4(-32.67 + 16.67k) = 0$, de donde se despeja $k = 2.05$ y los polos del sistema resultan el -1.25 doble. La transferencia lazo cerrado en estas condiciones es:

$$G = \frac{34.17}{(s+1.25)^2}$$

5) Para el sistema lineal, $U(s) = 0.1/s$, $\theta(s) = \frac{3.417}{s(s+1.25)^2}$ y por TVF de Laplace,

$$\theta_{\infty} = \lim_{s \rightarrow 0} s\theta(s) = 2.18 \text{ rad} = 125.3^{\circ}.$$

En el caso no lineal, el régimen se estudia en la ecuación diferencial para derivadas

$$\text{nulas: } r_{\infty} L + mgL \sin(\theta_{\infty}) = 0$$

Por otro lado, la realimentación está dada por

$$(U_{\infty} - \theta_{\infty})k = r_{\infty}, \text{ con } U_{\infty} = 0.1. \text{ Sustituyendo se llega a}$$

$$(0.1 - \theta_{\infty}) \times 2.05 = r_{\infty} = -1.96 \sin(\theta_{\infty}), \text{ ecuación trascendente en } \theta_{\infty}.$$

Resolviendo aproximadamente, se obtiene $\theta_{\infty} = 0.756 \text{ rad} = 43.3^{\circ}$



Solución del problema 2



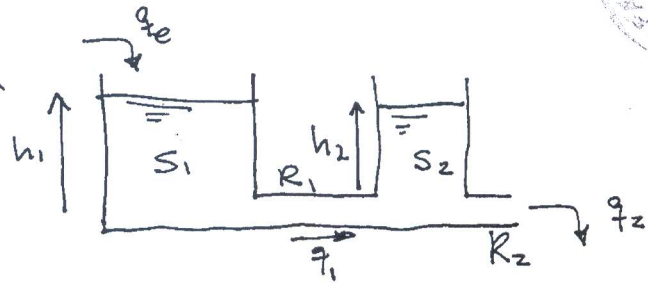
1. Ecuaciones de la dinámica

$$S_1 \frac{dh_1}{dt} = q_e - q_1 \quad (1)$$

$$S_2 \frac{dh_2}{dt} = q_1 - q_2 \quad (2)$$

$$q_1 = \frac{h_1 - h_2}{R_1} \quad (3)$$

$$q_2 = \frac{h_2}{R_2} \quad (4)$$



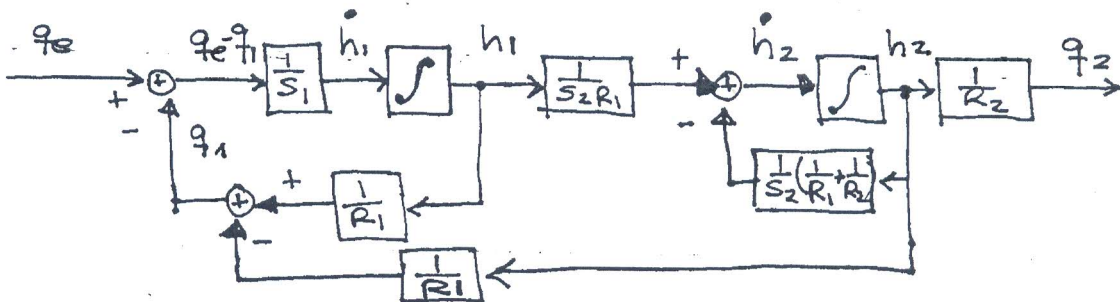
Sustituyendo q_1 y q_2 de (3) y (4) en (1) y (2):

$$S_1 \dot{h}_1 = q_e - \frac{h_1}{R_1} + \frac{h_2}{R_1} \quad (5)$$

$$S_2 \dot{h}_2 = \frac{h_1 - h_2}{R_1} - \frac{h_2}{R_2} = \frac{h_1}{R_1} - \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) h_2 \quad (6)$$

Arreglando estas ecs. en forma matricial:

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} \dot{h}_1 \\ \dot{h}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{S_1 R_1} & \frac{1}{S_1 R_1} \\ \frac{1}{S_2 R_1} & -\frac{1}{S_2} \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{S_1} \\ 0 \end{bmatrix} q_e \\ q_2 = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{R_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix} q_e \end{cases}$$



2) Función de transferencia

Primero calculamos $\frac{H_2(s)}{Q_e(s)}$. Para ello tomamos tr. de L en (5) (6)

$$\rightarrow H_1 \left(s + \frac{1}{s_1 R_1} \right) = \frac{1}{s_1} Q_e + \frac{1}{R_1 s_1} H_2 \quad (7)$$

$$\rightarrow H_2 \left[s + \frac{1}{s_2} \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) \right] = \frac{H_1}{R_1 s_2} \quad (8)$$

$$\rightarrow H_1 = H_2 R_1 s_2 \left[s + \frac{1}{s_2} \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) \right]$$

Substituyendo en (7)

$$H_2 R_1 s_2 \left[s + \frac{1}{s_2} \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) \right] \left[s + \frac{1}{s_1 R_1} \right] = \frac{1}{s_1} Q_e + \frac{1}{R_1 s_1} H_2$$

$$\rightarrow H_2 R_1 s_1 s_2 \left[s^2 + \left(\frac{1}{s_2} \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) + \frac{1}{s_1 R_1} \right) s + \frac{1}{R_1 s_1 s_2} \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) - \frac{1}{R_1^2 s_1 s_2} \right] = Q_e$$

$$\rightarrow \frac{H_2}{Q_e} = \frac{1}{R_1 s_1 s_2 \left[s^2 + \left(\frac{1}{R_1 s_2} + \frac{1}{R_2 s_2} + \frac{1}{R_1 s_1} \right) s + \frac{1}{R_1 R_2 s_1 s_2} \right]}$$

$$\text{como } Q_2 = H_2 / R_2$$

$$\rightarrow \frac{Q_2}{Q_e} = \frac{1}{R_1 R_2 s_1 s_2 \left[s^2 + \left(\frac{1}{R_1 s_2} + \frac{1}{R_2 s_2} + \frac{1}{R_1 s_1} \right) s + \frac{1}{R_1 R_2 s_1 s_2} \right]}$$

con los valores numéricos:

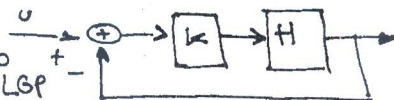
$$\boxed{\frac{Q_2}{Q_e} = \frac{8}{s^2 + 8s + 8}}$$

3) Si el controlador $C(s) = k$

3.a - En primer lugar estudiamos K_p o K_o
Estudiamos el lugar geométrico LGP

• n° de ramas z
• n° de asíntotas $z - o = 2$ } las ramas parten de los polos y llegan a asíntotas
polos en $-4 \pm \frac{\sqrt{32}}{2} = -4 \pm 2\sqrt{2}$
(lazo abierto)

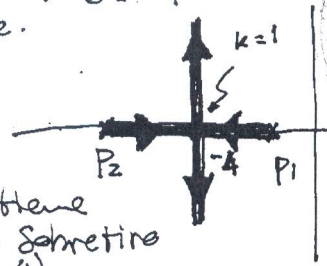
$$\rightarrow p_1, p_2 = \begin{cases} \alpha - 6.8288 \\ \alpha - \text{~~1.472~~} = -1.472 \end{cases}$$



8/9



- Puntos múltiples: $\frac{dH}{ds} = 0 \Rightarrow 2s+8=0 \Rightarrow s = -4$
El pto. $\in$ al lugar. $\therefore$ es punto múltiple.
- Centroides: $c = -8/2 = -4$
- ramas { llegan al p. múltiple a 0° y 180°
 { parten del p. múltiple a $\pm 90^\circ$
- Lugar sobre el eje real: $[p_1, p_2]$



El menor tiempo de asentamiento se obtiene sobre las asíntotas. Para que no haya sobretiro deben estar en el punto múltiple. ($s_0 = -4$)
Para eso

$$K_0 = -1/H(s_0) = -1/H(-4)$$

$$\therefore K_0 = -(16 - 32 + 8)/8 = +1 \quad \boxed{K_0 = +1}$$

Para $K < 0$ siempre hay un polo del lazo cerrado a la derecha de p_1 $\therefore$ o bien es inestable, o al menos más lento. $\Rightarrow K > 0 \Rightarrow K_0 = 1$ es la mejor solución.

El tiempo de asentamiento es $t_s \approx 3 \cdot \tau = \frac{3}{4} \text{ seg}$

3.c Estabilidad

La transferencia del lazo cerrado: $\frac{KH}{1+KH}$

su denominador es $s^2 + 8s + 8 + 8K$

Aplicando Routh Hurwitz:

1	8+8k	$\Rightarrow$ { Si $K < -1$ hay un cambio de sg. { Si $K > -1$ no hay cambio de sg.
8	-	
8+8k	-	$\Rightarrow$ Sistema estable $\Leftrightarrow K > -1$

4.a

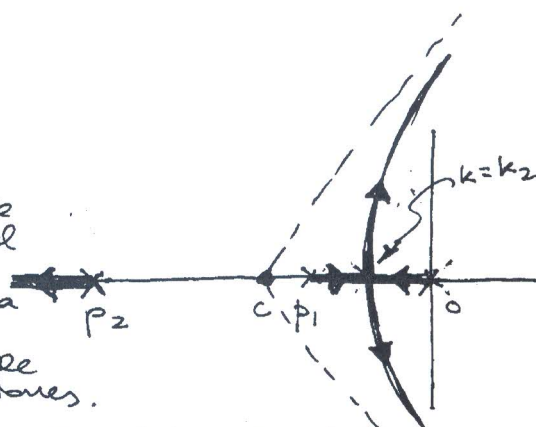
Para que el error asintótico sea 0, el sistema debe ser de tipo 1 al menos. $\Rightarrow$ controlador $C(s) = K/s$ agrega un polo en el origen.

Analizamos el L.G.P. de $\frac{K}{s} \frac{8}{s^2 + 8s + 8}$

- n.º ramas: 3
- parten de los 3 polos del lazo abierto $p_1, p_2, 0$
- n.º asíntotas: 3
- Centroides: $c = (p_1 + p_2 + 0)/3 = -4/3$
- pts. múltiples: $\frac{dH}{ds} = 0 \Rightarrow -16 \pm \sqrt{160} = \begin{cases} -4.77 \leftarrow \text{no está en LOP} \\ -0.56 \leftarrow \text{Si!} \end{cases}$
- Seguimiento sobre eje real $[p_1, 0], [-\infty, p_2]$

∴ hay un rango de valores de K : $0 \leq K \leq K_1$ que produce lazo cerrado estable con error asintótico nulo al escalón.

Elegimos $K = K_2$ que coloca los polos en el pto. múltiple logrando menor tiempo de asentamiento, sin oscilaciones. (ver más abajo)



4.b. Diferencias entre esta elección y la 3.b:

- En este caso error asintótico al escalón es nulo en cambio en 3.b no.
- Error asintótico a la rampa es finito (sistema tipo 1) en cambio en 3.b diverge.
- En este caso el tiempo de asentamiento es mayor de el 3.b ya que sus polos reales más a la derecha. Esto es una desventaja, sistema más lento.

para colocar los polos en el pto. múltiple "p". Se calcula K_2 :

$$K_2 = -1 / \left(\frac{H(s)}{s} \right) \bigg|_{s=p} \approx 0.21$$

$$K_v = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{d_2(s)}{ds} \frac{K_2}{s} = K_2 \xrightarrow{e^{-1}} e^{-1} = \frac{1}{K_v} = \frac{1}{K_2} \approx 4.8 \text{ m/s}$$

5. Si en lugar de un controlador "I" se usa un "PI" ~~por~~ se logra que el sistema sea de tipo 1 (y. el error asintótico al escalón es 0), y además se llevan las ramas más a la izquierda logrando tiempos de asentamiento más bajos.

P.ej. el controlador $C(s) = K \frac{s+1.5}{s}$

logra el L.G.P. que se muestra. Se puede lograr menor tiempo de asentamiento aunque con un poco de sobretiro.

