

Carrera: INGENIERÍA ELÉCTRICA

Materia: CONTROL

Asignaturas: INTRODUCCIÓN A LA TEORÍA DE CONTROL

Plan: 97

Fecha: 22/02/2021

Instituto de Ingeniería Eléctrica

Departamento de Sistemas y Control

PERÍODO: FEBRERO 2021

PROBLEMA 1

Algunos edificios de viviendas cuentan con un sistema de calefacción por losa radiante basado en la circulación de agua caliente por un sistema de cañerías instaladas en el piso de cada apartamento. El sistema cuenta con un calentador central, que provee agua caliente a demanda a apartamento.

La Figura 1 muestra el sistema de calentamiento central del edificio. Se trata de una caldera alimentada a Fuel Oil, cuyo aporte calorífico puede modelarse como $W_{in} = \beta \cdot q_{FuelOil}$, donde W_{in} es la potencia térmica entregada por el quemador, $q_{FuelOil}$ es el flujo de entrada de combustible y β es una constante de proporcionalidad en unidades adecuadas.

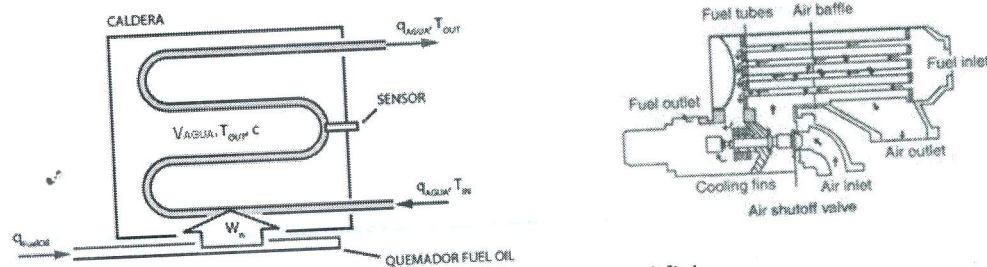


Figura 1. Caldera del edificio

El flujo de salida de la caldera se denomina q_{AGUA} , mientras que la temperatura de salida de la agua se denomina T_{OUT} y la de retorno T_{IN} . La caldera contiene un volumen de agua V_{agua} constante, con una capacidad calorífica c (medida en J/LK). La temperatura del agua dentro del calentador se considera igual a la temperatura de salida. Con el objetivo de medir la temperatura interior del tanque, se coloca una vaina con un termistor, cuya ecuación característica es $R_T = R_0(1 - \alpha T_{OUT})$

Por otra parte, se diseña un circuito de control encargado de controlar el flujo de combustible en base a la temperatura interior del tanque y de un voltaje de referencia. La Figura 2 representa dicho circuito de control.

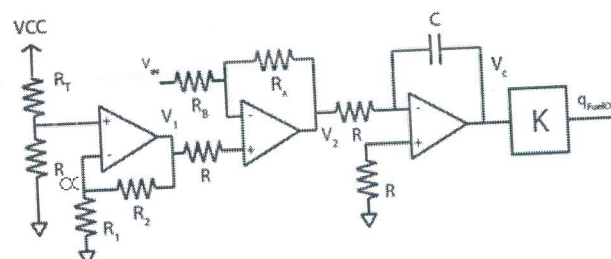


Figura 2. Circuito de control de la caldera



1/1

Se pide

1. Hallar las ecuaciones dinámicas del sistema
2. Linealización y diagrama de bloques
 - a. Linealizar el sistema en un entorno del punto $T_{in}^0, T_{out}^0, q_{agua}^0$, considerando v_{in} , q_{AGUA} y T_{in} como entradas, y T_{out} como salida
 - b. Realizar un diagrama de bloques del sistema.
 - c. Determinar un modelo en variables de estado.



A partir de esta sección, se consideran los siguientes datos numéricos:

- Datos del circuito de acondicionamiento

$$R = 100 \text{ k}\Omega$$

$$R_A = 150 \text{ k}\Omega$$

$$C = 130 \text{ }\mu\text{F}$$

$$R_1 = 10 \text{ k}\Omega$$

$$R_B = 820 \text{ }\Omega$$

$$V_{CC} = 5\text{V}$$

$$R_2 = 2.2 \text{ k}\Omega$$

$$R_\alpha = 2.2 \text{ k}\Omega$$

- Datos del sensor de temperatura

$$R_0 = 70 \text{ k}\Omega$$

$$\alpha = 0.1 \Omega/\text{K}$$

- Datos del circuito hidráulico y del quemador

$$V = 10\text{L}$$

$$\beta = 20 \times 10^6 \text{ J/L}$$

$$c = 4180 \text{ J/LK}$$

- Datos del punto de operación

$$T_{in}^0 = 303\text{K}$$

$$T_{out}^0 = 323\text{K}$$

$$q_{agua}^0 = 1\text{L/s}$$

3. Dibuje el lugar geométrico de las raíces resultante al variar la constante de proporcionalidad que relaciona V_C con $q_{FuelOil}$ (K)
4. Hallar el valor de K que determina un amortiguamiento crítico para los polos dominantes
5. Debido a las bajas temperaturas exteriores, la demanda de agua caliente hace que q_{agua} aumente a $1,2\text{L/s}$ y T_{in} disminuya a 298K . Calcular el error porcentual en la determinación del valor de régimen de T_{out} cuando se utiliza el modelo lineal respecto del modelo no lineal.

Solución problema 1

1.

Balance de energía en la caldera

$$V_{agua} \cdot c \cdot T_{out} = \beta \cdot q_{FuelOil} + q \cdot c \cdot T_{in} - q \cdot c \cdot T_{out}$$

Circuito de control

$$e = \frac{R_\alpha}{R_T + R_\alpha} V_{CC}$$

$$V_1 = \frac{R_1 + R_2}{R_1} e = \frac{(R_1 + R_2) R_\alpha}{(R_T + R_\alpha) R_1} V_{CC}$$

$$V_2 = V_1 \left(1 + \frac{R_a}{R_b} \right) - \frac{R_a}{R_b} V_{in}$$

$$\dot{V}_C = -\frac{1}{RC} V_2$$

$$\dot{V}_C = \frac{1}{RC} \left[\frac{R_a}{R_b} V_{in} - \left(1 + \frac{R_a}{R_b} \right) \left(1 + \frac{R_2}{R_1} \right) \frac{R_\alpha}{(R_0(1 - \alpha T_{OUT}) + R_\alpha)} V_{CC} \right]$$

1.

$$V_{agua} \cdot c \cdot T_{out} = \beta \cdot q_{FuelOil} + q \cdot c \cdot T_{in} - q \cdot c \cdot T_{out}$$

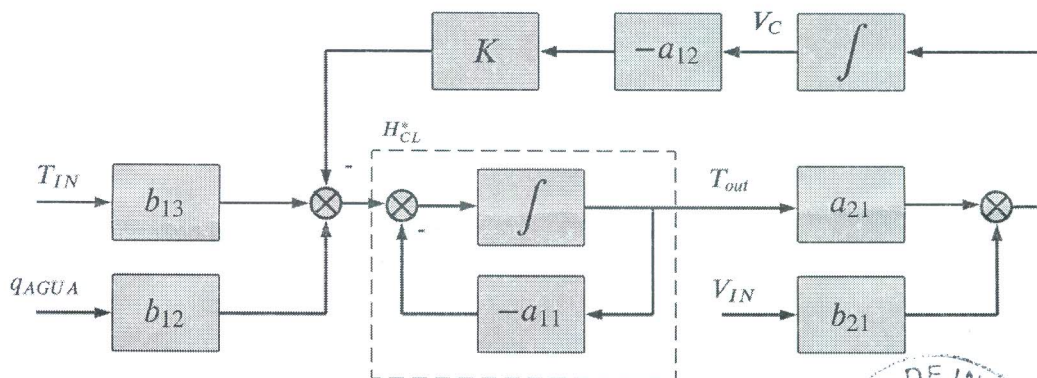
$$\dot{V}_C = \frac{1}{RC} \left[\frac{R_a}{R_b} V_{in} - \left(1 + \frac{R_a}{R_b} \right) \left(1 + \frac{R_2}{R_1} \right) \frac{R_\alpha}{(R_0(1 - \alpha T_{OUT}) + R_\alpha)} V_{CC} \right]$$

2.

Linealizando las ecuaciones dinámicas del sistema

$$T_{out} = \frac{\beta}{V_{agua} \cdot c} \cdot K \cdot V_C + \frac{q_{agua0}}{V_{agua}} \cdot T_{in} - \frac{q_{agua0}}{V_{agua}} \cdot T_{out} + \frac{(T_{in0} - T_{out0})}{V_{agua}} q_{agua}$$

$$\dot{V}_C = \frac{R_a}{R_b RC} V_{in} - \left(1 + \frac{R_a}{R_b} \right) \left(1 + \frac{R_2}{R_1} \right) \frac{R_\alpha \cdot R_0 \cdot \alpha \cdot V_{CC}}{(R_0(1 - \alpha T_{OUT0}) + R_\alpha)^2} T_{out}$$



$$\begin{bmatrix} T_{out} \\ \dot{V}_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & K \cdot a_{12} \\ a_{21} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_{out} \\ V_c \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{in} \\ q_{agua} \\ T_{in} \end{bmatrix}$$

Donde:

$$\begin{aligned} a_{11} &= -\frac{q_{agua0}}{V_{agua}} & a_{12} &= \frac{\beta}{V_{agua} \cdot c} \cdot K \\ a_{21} &= -\left(1 + \frac{R_a}{R_b}\right) \left(1 + \frac{R_2}{R_1}\right) \frac{R_a \cdot R_0 \cdot \alpha \cdot V_{CC}}{(R_0(1 - \alpha T_{OUT0}) + R_a)^2} \\ b_{12} &= \frac{(T_{in0} - T_{out0})}{V_{agua}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b_{13} &= \frac{q_{agua0}}{V_{agua}} \\ b_{21} &= \frac{R_a}{R_b RC} \end{aligned}$$



3.

Sabiendo que

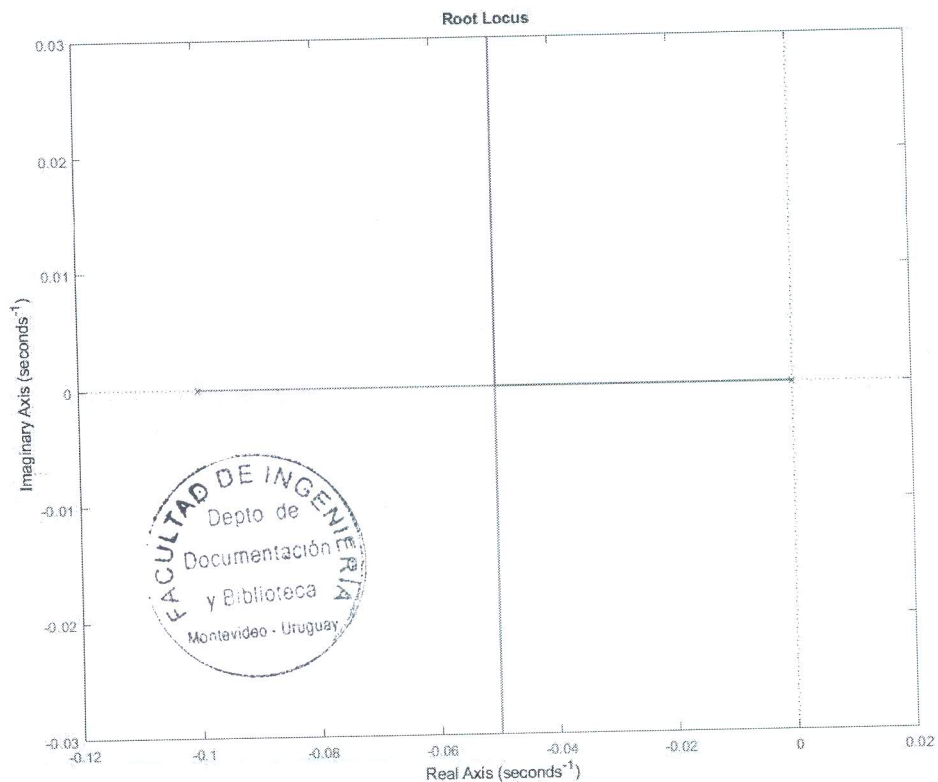
$$H_{CL}^*(s) = \frac{1}{s - a_{11}}$$

La transferencia en lazo abierto del sistema es

$$H_{OL}(s) = \frac{-a_{21} \cdot a_{12} \cdot K}{s \cdot (s - a_{11})}$$

El lugar geométrico de las raíces para esta transferencia es

4/11



4. Dada la forma del LGR, el punto de amortiguamiento crítico se da en el punto múltiple $p = -0.05$ doble

Sabiendo que

$$H_{CL}(s) = \frac{H_{OL}(s)}{1 + H_{OL}(s)} = \frac{-a_{21} \cdot a_{12} \cdot K}{-a_{21} \cdot a_{12} \cdot K + s \cdot (s - a_{11})}$$

Resolvemos la igualdad para la ecuación característica

$$\begin{aligned} -a_{21} \cdot a_{12} \cdot K + s \cdot (s - a_{11}) &= (s + 0.05)^2 \\ s^2 - a_{11}s - a_{21} \cdot a_{12} \cdot K &= s^2 + 0.1s + 0.05^2 \\ K &= 0.0014 \end{aligned}$$

5. El sistema tiene error en régimen nulo frente a entradas de tipo escalón

5/11

Problema 2

En la Figura 1 se representa un pozo de bombeo, de sección A , que es parte una estación de saneamiento. Al pozo ingresa un caudal q_I de aguas residuales. Una bomba sumergible, de volumen despreciable, bombea un caudal $q_O = af$ hacia la planta de tratamiento, donde a es una constante positiva y f es la frecuencia rotacional de la bomba.

Para que el nivel de agua, h , en el pozo se mantenga próximo una señal de referencia h_R , se implementa el sistema de control de la Figura 2, donde el bloque PID representa un controlador proporcional-integral-derivativo de función de transferencia $C(s) = -\left(K_P + \frac{K_I}{s} + K_D s\right)$ con $K_P, K_I, K_D \geq 0$. Un flotador permite medir el nivel h de agua en el pozo, pero la medida es afectada por ruido, n , debido al oleaje superficial. A partir del error medido, e , el controlador PID comanda la frecuencia rotacional de la bomba.

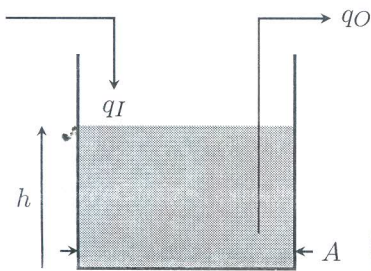


Figura 1: Pozo de bombeo.

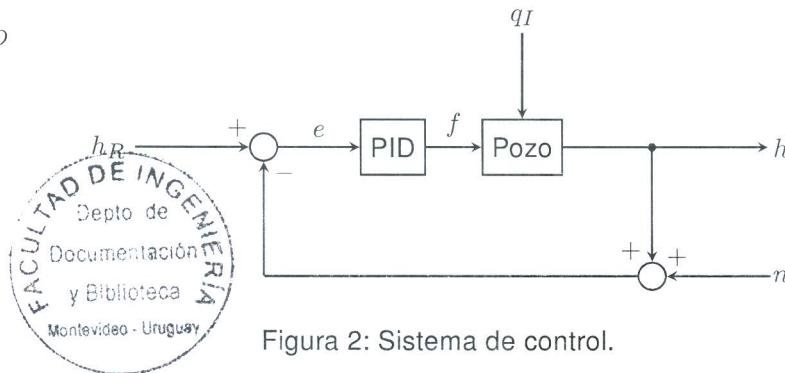


Figura 2: Sistema de control.

1. Considere el sistema de salida h y entradas q_I , h_R y n . Halle su matriz de transferencia.

Se requiere sintonizar el controlador PID de forma tal que:

- En ausencia de ruido ($n \equiv 0$) y para una señal de referencia $h_R = h_R^0$ constante; el error, e , en régimen estacionario sea menor o igual a una constante d (positiva) ante una entrada q_I en forma de rampa con pendiente $p > 0$.
 - La respuesta transitoria del sistema de control no presente oscilaciones.
 - La respuesta en frecuencia del subsistema de entrada n y salida h tienda a cero para $\omega \rightarrow \infty$.
2. Sintonice el controlador PID de forma tal de cumplir con los requerimientos. Entre todas las sintonizaciones posibles, elija aquella que minimiza el ancho de banda de la respuesta en frecuencia del subsistema de entrada n y salida h . Justifique detalladamente.

Para las siguientes partes se asume que:

$$a = 0,05 \text{ m}^3 \text{ s}^{-1} \text{ Hz}^{-1}, \quad A = 100 \text{ m}^2, \quad d = 1 \text{ m}, \quad p = 1 \text{ m}^3 \text{ s}^{-2}, \quad h_R^0 = 2 \text{ m}.$$

3. Para la sintonización hallada en el punto anterior:
 - a) Evalúe los márgenes de estabilidad del sistema control y señálelos en un diagrama de Bode.
 - b) Estudie la respuesta en frecuencia del subsistema de entrada q_I y salida e y comente sus características más relevantes en relación al desempeño del sistema de control.
4. Describa con un diagrama de bloques cómo emularía el diseño anterior en tiempo discreto. ¿Cuál sería la función de transferencia del controlador y cómo elegiría el período de muestreo?

Solución del problema 2

Parte 1

Balance volumétrico en el pozo de bombeo:

$$A\dot{h} = q_I - af.$$

Aplicando transformada de Laplace (con condiciones iniciales nulas) a la ecuación anterior:

$$AsH(s) = Q_I(s) - aF(s). \quad (1)$$

Sabiendo que el bloque PID es un controlador de función de transferencia $C(s)$, del diagrama de bloques de la Figura 2:

$$F(s) = C(s)E(s), \quad (2)$$

$$E(s) = H_R(s) - (N(s) + H(s)). \quad (3)$$

Sustituyendo (3) en (2) y (2) en (1):

$$AsH(s) = Q_I(s) - aC(s)(H_R(s) - (N(s) + H(s))).$$

Operando:

$$\left(1 - \frac{aC(s)}{As}\right) H(s) = \frac{1}{As} Q_I(s) - \frac{aC(s)}{As} (H_R(s) - N(s)).$$

Sustituyendo $C(s) = -\left(K_P + \frac{K_I}{s} + K_D s\right)$ en la expresión anterior y operando:

$$\left(s^2 + \frac{\frac{a}{A}K_P}{1 + \frac{a}{A}K_D}s + \frac{\frac{a}{A}K_I}{1 + \frac{a}{A}K_D}\right) H(s) = \frac{s}{A(1 + \frac{a}{A}K_D)} Q_I(s) + \frac{\frac{a}{A}(K_I + K_P s + K_D s^2)}{1 + \frac{a}{A}K_D} (H_R(s) - N(s)). \quad (4)$$

De la última expresión se desprende que la matriz de transferencia del sistema, de salida h y entradas q_I , h_R y n , es:

$$\begin{bmatrix} \frac{H}{Q_I}(s) & \frac{H}{H_R}(s) & \frac{H}{N}(s) \end{bmatrix}$$

donde:

$$\frac{H}{Q_I}(s) = \frac{\frac{s}{A(1 + \frac{a}{A}K_D)}}{\Delta(s)}, \quad \frac{H}{H_R}(s) = \frac{\frac{\frac{a}{A}(K_I + K_P s + K_D s^2)}{1 + \frac{a}{A}K_D}}{\Delta(s)}, \quad \frac{H}{N}(s) = -\frac{\frac{\frac{a}{A}(K_I + K_P s + K_D s^2)}{1 + \frac{a}{A}K_D}}{\Delta(s)}, \quad (5)$$

$$\text{siendo } \Delta(s) = s^2 + \frac{\frac{a}{A}K_P}{1 + \frac{a}{A}K_D}s + \frac{\frac{a}{A}K_I}{1 + \frac{a}{A}K_D}.$$

Parte 2

El sistema de control es estable si y solo si todas las raíces de su polinomio característico, $\Delta(s)$, tienen parte real negativa. Aplicando el criterio de estabilidad de Routh-Hurwitz al polinomio $\Delta(s)$, se concluye que el sistema es estable si y solo si:

$$\begin{cases} K_P > 0, \\ K_I > 0, \\ K_D \geq 0. \end{cases} \quad (6)$$

Para que $\frac{H}{N}(j\omega) \rightarrow 0$ para $\omega \rightarrow \infty$, debe elegirse

$$K_D = 0,$$

entonces, introduciendo

$$g \triangleq \frac{a}{A}$$

la ecuación (4) adopta la siguiente forma

$$\Delta(s)H(s) = \frac{s}{A}Q_I(s) + g(K_I + K_P s)(H_R(s) - N(s)), \quad (7)$$

ahora con

$$\Delta(s) = s^2 + gK_P s + gK_I. \quad (8)$$

Despejando $H(s)$ de (7) para sustituirla en (3) y operando:



$$\begin{aligned} E(s) &= \left(1 - \frac{g(K_I + K_P s)}{\Delta(s)}\right)(H_R(s) - N(s)) - \frac{s}{A\Delta(s)}Q_I(s) \\ &= \frac{\Delta(s) - g(K_I + K_P s)}{\Delta(s)}(H_R(s) - N(s)) - \frac{s}{A\Delta(s)}Q_I(s) \\ &= \frac{s^2}{\Delta(s)}(H_R(s) - N(s)) - \frac{s}{A\Delta(s)}Q_I(s). \end{aligned} \quad (9)$$

De (9) se tiene que, para $n = 0$, y $h_R = h_R^0$ (constante), el error en régimen ante una rampa de pendiente $p > 0$ en q_I es:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sE(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s \left(\frac{s^2}{\Delta(s)} \frac{h_R^0}{s} - \frac{s}{A\Delta(s)} \frac{p}{s^2} \right) = \frac{p}{AgK_I} = \frac{p}{aK_I}. \quad (10)$$

ya que se puede aplicar el teorema del valor final porque las raíces de $\Delta(s)$ tienen parte real negativa por cumplirse las condiciones (6). Para que se cumpla el requerimiento referente al error en régimen debe cumplirse $\frac{p}{aK_I} \leq d$, o equivalentemente

$$K_I \geq \frac{p}{ad}. \quad (11)$$

El polinomio característico, $\Delta(s)$, del sistema de control se puede expresar como

$$\Delta(s) = s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2$$

donde $\zeta \triangleq \frac{K_P}{2} \sqrt{g/K_I}$ y $\omega_n \triangleq \sqrt{gK_I}$. Para que la respuesta transitoria del sistema de control no presente oscilaciones, debe cumplirse $\zeta \geq 1$, o equivalentemente

$$K_P \geq 2\sqrt{\frac{K_I}{g}}. \quad (12)$$

Como $K_D = 0$, se tiene que $\frac{H}{N}(s) = -\frac{g(K_I + K_P s)}{s^2 + gK_P s + gK_I}$. El ancho de banda de la respuesta en frecuencia del subsistema de entrada n y salida h es $\omega_b > 0$ tal que $|\frac{H}{N}(j\omega_b)| = \frac{1}{\sqrt{2}}$, es decir $\omega_b > 0$ tal que

$$\frac{g\sqrt{K_I^2 + K_P^2\omega_b^2}}{\sqrt{(gK_I - \omega_b^2)^2 + g^2K_P^2\omega_b^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}. \quad (13)$$

Elevando al cuadrado ambos miembros de la ecuación anterior y operando:

$$x^2 - (2gK_I + g^2K_P^2)x - g^2K_I^2 = 0,$$

donde se introdujo $x = \omega_b^2$. Resolviendo la ecuación anterior y eligiendo la solución $x > 0$, se encuentra que

$$\omega_b = \sqrt{\frac{2gK_I + g^2K_P^2 + \sqrt{(2gK_I + g^2K_P^2)^2 + 4g^2K_I^2}}{2}}. \quad (14)$$

De la expresión anterior se desprende que para minimizar ω_b , las constantes K_P y K_I se deben elegir lo más pequeñas posible. Entonces, para que aún se cumplan las condiciones (11) y (12) se debe elegir:

$$\boxed{K_I = \frac{p}{ad}} \quad \text{y} \quad \boxed{K_P = 2\sqrt{\frac{K_I}{g}} = \frac{2}{a}\sqrt{\frac{Ap}{d}}}.$$

Parte 3

Se tiene que

$$a = 0,05 \text{ m}^3 \text{ s}^{-1} \text{ Hz}^{-1}, \quad A = 100 \text{ m}^2, \quad g = \frac{a}{A} = 0,0005 \text{ m s}^{-1} \text{ Hz}^{-1}, \quad d = 1 \text{ m} \quad \text{y} \quad p = 1 \text{ m}^3 \text{ s}^{-2}.$$

Entonces, según la parte anterior, la sintonización es

$$K_D = 0, \quad K_I = \frac{p}{ad} = 20 \text{ Hz s}^{-1} \text{ m}^{-1}, \quad K_P = \frac{2}{a}\sqrt{\frac{Ap}{d}} = 400 \text{ Hz m}^{-1},$$

y el polinomio característico adopta la siguiente forma:

$$\Delta(s) = s^2 + 0,2s + 0,01 = (s + 0,1)^2 \quad (15)$$



Parte 3.a

De (1), la función de transferencia del subsistema de entrada f y salida h es

$$\frac{H}{F}(s) = -\frac{a}{As} = -\frac{g}{s}. \quad (16)$$

La función de transferencia de lazo abierto del sistema de control es

$$L(s) \triangleq -C(s) \left(-\frac{g}{s}\right) = \frac{g(K_P s + K_I)}{s^2}. \quad (17)$$

La frecuencia de cruce de ganancia es $\omega_c > 0$ tal que $|L(j\omega_c)| = 1$, es decir $\omega_c > 0$ tal que

$$\frac{g\sqrt{K_I^2 + K_P^2\omega_c^2}}{\omega_c^2} = 1 \quad (18)$$

Elevando al cuadrado ambos miembros de la ecuación anterior y operando:

$$y^2 - g^2K_P^2y - g^2K_I^2 = 0 \quad (19)$$

donde se introdujo $y = \omega_c^2$. Resolviendo la ecuación anterior y eligiendo la solución $y > 0$, se encuentra que

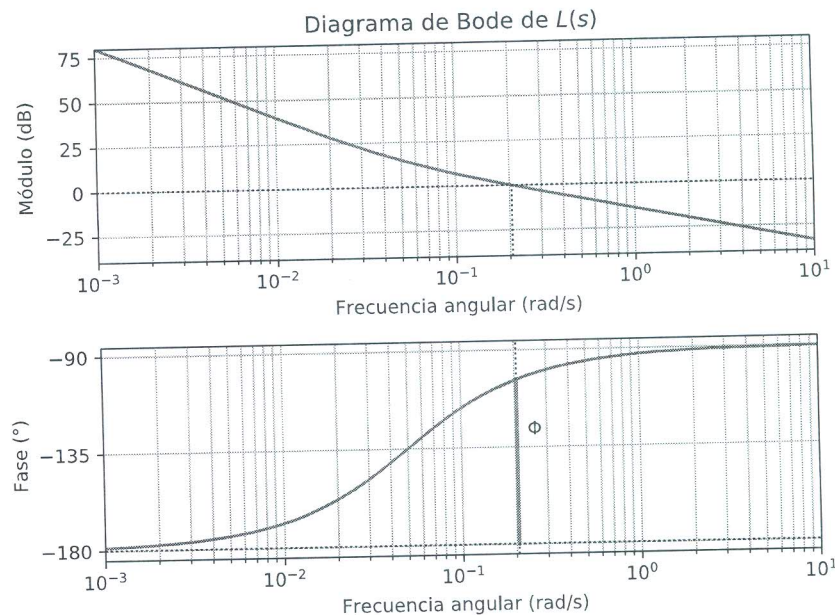
$$\omega_c = \sqrt{\frac{g^2K_P^2 + \sqrt{g^4K_P^4 + 4g^2K_I^2}}{2}} = \sqrt{\frac{g}{2} \left(gK_P^2 + \sqrt{g^2K_P^4 + 4K_I^2} \right)} \approx 0,2058 \text{ rad s}^{-1}. \quad (20)$$

El margen de fase del sistema realimentado es:

$$\Phi = \angle L(j\omega_c) - (-\pi) = \angle K_P j\omega_c + K_I - \pi + \pi = \angle K_P j\omega_c + K_I = \arctan\left(\frac{K_P \omega_c}{K_I}\right) \approx 76,35^\circ. \quad (21)$$

El margen de ganancia es infinito porque $L(j\omega)$ no interfecta el eje real negativo para $\omega \in (0, \infty)$.

En el siguiente diagrama de Bode se aprecia gráficamente el margen de fase finito (Φ) y el margen de ganancia infinito (ya que la curva de fase no intersecta la recta horizontal por -180°).

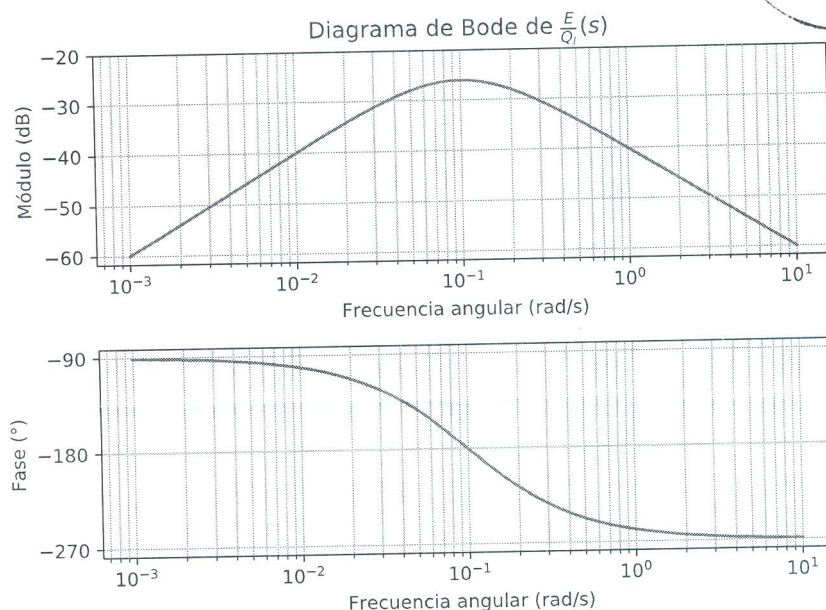


Parte 3.b

De (9) se tiene que, en lazo cerrado, la función de transferencia de q_I a e es:

$$\frac{E}{Q_I}(s) = -\frac{s}{A\Delta(s)} = -\frac{s}{100(s + 0,1)^2}.$$

Su diagrama de Bode es el siguiente:



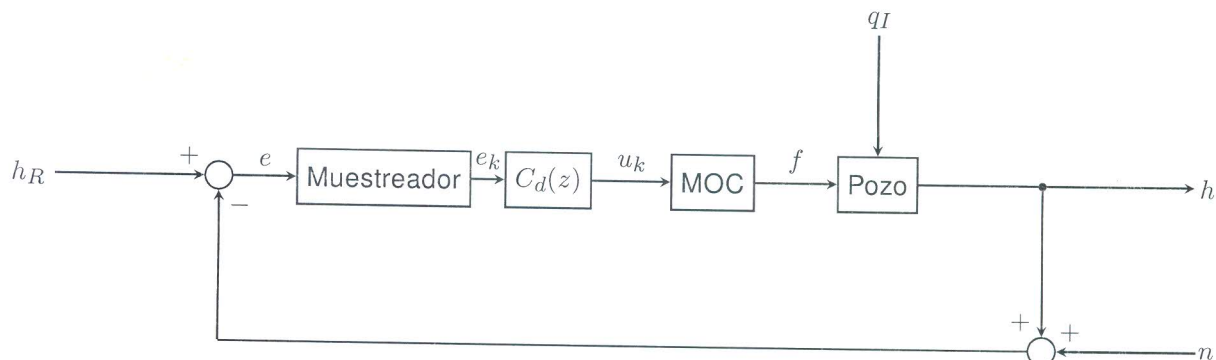
El sistema de control rechaza completamente las componentes de q_I de muy alta y muy baja frecuencia. El menor rechazo tiene lugar para las componentes de frecuencia de q_I próximas a $\omega = 0,1 \text{ rad s}^{-1}$.



10/11

Parte 4

El diseño, en tiempo continuo, de las partes anteriores se podría emular en, tiempo discreto, como se representa en el siguiente diagrama de bloques, donde el bloque MOC es un mantenedor de orden cero sincronizado con el muestreador (que se asume que cuenta con un filtro anti-aliasing). Sea T_s el período de muestreo.



La acción de control proporcional-integral $f(t) = -(K_P e(t) + K_I \int_0^t e(s) ds)$ correspondiente al controlador de tiempo continuo, puede emularse en tiempo discreto tomando

$$u_k = -(K_P e(kT) + K_I i_k) = -(K_P e_k + K_I i_k), \quad (22)$$

donde i_k es una aproximación de $\int_0^t e(s) ds$, por ejemplo, mediante una regla de cuadratura trapezoidal:

$$i_k = i_{k-1} + T_s \frac{e_{k-1} + e_k}{2}.$$

En este caso, aplicando transformada Z a la expresión anterior:

$$I(z) = z^{-1} I(z) + \frac{T_s}{2} (z^{-1} + 1) E(z).$$

Despejando $I(z)$ de la ecuación anterior:

$$I(z) = \frac{T_s}{2} \left(\frac{1 + z^{-1}}{1 - z^{-1}} \right) E(z) = \frac{T_s}{2} \left(\frac{z + 1}{z - 1} \right) E(z). \quad (23)$$

Por otro lado, aplicando transformada Z a (22):

$$U(z) = -(K_P E(z) + K_I I(z)). \quad (24)$$

Sustituyendo (23) en (24):

$$U(z) = - \left(K_P + K_I \frac{T_s}{2} \left(\frac{z + 1}{z - 1} \right) \right) E(z),$$

de donde se concluye que la transferencia del controlador en tiempo discreto debe ser:

$$C_d(z) = \frac{U}{E}(z) = - \left(K_P + K_I \frac{T_s}{2} \left(\frac{z + 1}{z - 1} \right) \right).$$

La frecuencia angular de muestreo, $\omega_s = \frac{2\pi}{T_s}$, debe elegirse mucho mayor que el ancho de banda de $\frac{H}{H_R}(s)$, pero no excesivamente alta (porque el costo del sistema de control típicamente aumenta con la frecuencia de muestreo). Como $\frac{H}{H_R}(s) = -\frac{H}{N}(s)$, el ancho de banda de $\frac{H}{H_R}(s)$ está dado por la expresión (14). Evaluándola,

$$\omega_b \approx 0,2482 \text{ rad s}^{-1},$$

así que podría tomarse

$$T_s = 1 \text{ s},$$

para que se cumpla $\frac{\omega_s}{\omega_b} \approx 25$.



11/11