

Carrera: INGENIERÍA ELÉCTRICA
 Materia: CONTROL
 Asignaturas: SISTEMAS Y CONTROL
 Plan: 97
 Fecha: 20/04/2022

Instituto de Ingeniería Eléctrica
 Departamento de Sistemas y Control

PERÍODO: ABRIL 2022

Problema 1

Como parte de su labor como ingeniero en una compañía de diseño de componentes para computadoras, se le solicita participar en el desarrollo del sistema de enfriamiento para un nuevo procesador.

La estructura general del sistema de enfriamiento se muestra en la Figura 1a. El mismo se apoya sobre el encapsulado del procesador, y se compone de un dissipador de aluminio, que a su vez tiene un ventilador montado en su parte superior. El ventilador fuerza el pasaje de aire entre las aletas del dissipador.

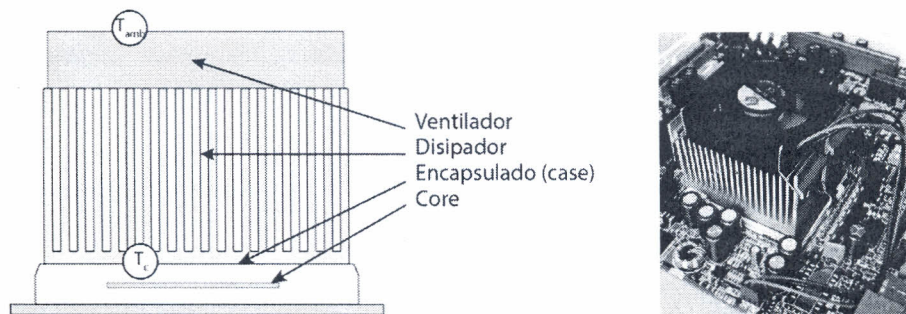


Figura 1: Esquema de la estructura del sistema de enfriamiento. Imagen de un sistema de enfriamiento real.

El nuevo procesador tiene la capacidad de modificar de forma autónoma la frecuencia de sus relojes, lo que genera un consumo de energía variable. En consecuencia, la potencia disipada en forma de calor desde el core es también variable, y se representa con P_{MCU} .

A modo de simplificación, se realizan los siguientes supuestos:

- Todo el calor generado por el core se disipa a través del sistema de enfriamiento
- La resistencia térmica del conjunto formado por el dissipador y el ventilador varía según el flujo de aire forzado por el ventilador Q_{AIRE} , según la ecuación

$$\frac{r_0}{1 + c \cdot Q_{AIRE}} [K/W] \quad (1)$$

- El flujo de aire forzado por el ventilador es función de su voltaje de alimentación, según la transferencia

$$\frac{Q_{AIRE}}{V_M}(s) = \frac{\alpha}{\beta + s} \quad (2)$$

- La temperatura del ambiente es variable, y se representa como T_{amb} . La temperatura de la interfaz entre el dissipador y el encapsulado se representa como T_c

1. Tomando como entradas T_{amb} , P_{MCU} y V_M , halle las ecuaciones dinámicas para T_c

Con el objetivo de controlar la temperatura T_c , un colega sugiere colocar un sensor de temperatura capaz de medir T_c . El sensor de temperatura tiene una salida de voltaje

$$V_{sensor} = K \cdot T_c \quad (3)$$

Además, su colega sugiere el siguiente circuito de control

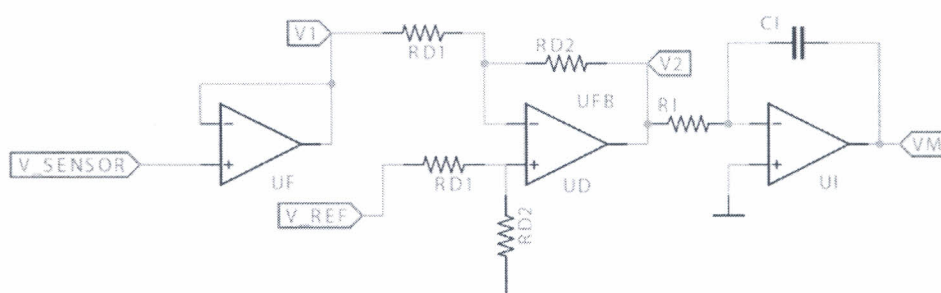


Figura 2: Circuito de control

En la Figura 2, V_{sensor} representa la salida del sensor de temperatura, V_{ref} una señal de referencia, y V_m el voltaje de alimentación al motor

2. Modele el sistema de entradas $[V_{sensor}, V_{ref}]$ y de salida V_m . Sugerencia: preste especial atención a la división del circuito en sub-bloques con funcionalidad definida.

A partir de ahora, se trabaja conjuntamente con el sistema de enfriamiento y su sensor de temperatura, el circuito de control y el ventilador, dando como resultado el sistema de entradas $(T_{amb}, V_{ref}, P_{MCU})$.

3. Linealice el sistema en torno al punto de operación $(T_{amb0}, V_{ref0}, P_{MCU0})$, determinando de forma completa el punto de operación.
Halle un modelo en variables de estado para el sistema, con (Q_{AIRE}, V_M) como vector de estados.
4. Realizar un diagrama de bloques del sistema completo que muestre todas las señales presentes en la Figura 2, usando solamente bloques sumadores, proporcionales e integradores.
5. Dibujar el lugar geométrico de las raíces del sistema realimentado al variar el parámetro K .
6. Halle el valor de K que determine que el sistema tenga una respuesta no oscilatoria con un tiempo de establecimiento tan bajo como sea posible.
7. Determine el margen de ganancia del sistema

Carrera: INGENIERÍA ELÉCTRICA
Materia: CONTROL
Asignaturas: SISTEMAS Y CONTROL
Plan: 97
Fecha: 20/04/2022

Instituto de Ingeniería Eléctrica
Departamento de Sistemas y Control



PERÍODO: ABRIL 2022

Problema 2

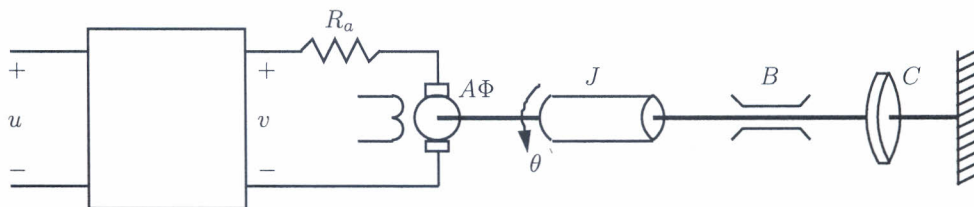


Figura 1: Sistema electromecánico.

Se tiene el sistema de la figura 1, donde:

- el amplificador responde de la siguiente forma a la entrada u :

$$\frac{dv}{dt} + 10v = 150u \quad ;$$

- el motor es de corriente continua, de inducción constante $A\Phi = 0,4 \frac{V \cdot s}{rad}$, resistencia de inducido $R_a = 2 \Omega$, inductancia despreciable y aplica un par mecánico T_m al eje;
- el eje tiene un momento de inercia $J = 1 \frac{N \cdot m \cdot s^2}{rad}$, una constante de fricción $B = 0,12 \frac{N \cdot m \cdot s}{rad}$, una constante elástica $C = 10 \frac{N \cdot m}{rad}$ y su desplazamiento angular es medido por θ .

1. Se pide:

- Hallar una representación en variables de estado para el sistema de entrada u y salidas θ y T_m .
- Dibujar un diagrama de bloques del sistema compuesto por sumadores, multiplicadores e integradores.
- Obtener la matriz de transferencia.

2. Tomando ahora como única salida θ , se implementa un controlador proporcional como el de la figura 2 donde H es la función de transferencia entre u y θ .

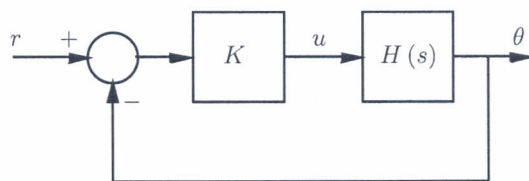


Figura 2: Sistema realimentado.

Se pide:

- Encontrar los valores de $K \in \mathbb{R}$ que estabilizan el sistema realimentado.
- Dibujar el lugar de las raíces, paramétrico en $K \in \mathbb{R}$.
- Determinar K para que el sobretiro de la respuesta a una entrada en escalón sea de 16,3%.
Nota: Se aceptan soluciones aproximadas con la debida justificación.
- Para el K determinado en el punto anterior, hallar el error en régimen ante una entrada escalón unitario.

Solución del problema 1



1.

Como todo el calor se disipa a través del sistema de enfriamiento

$$T_c - T_{amb} = P_{MCU} \cdot r_D = \frac{r_0}{(1 + c \cdot Q_{AIRE})} P_{MCU}$$

$$T_c = \frac{r_0}{(1 + c \cdot Q_{AIRE})} P_{MCU} + T_{amb}$$

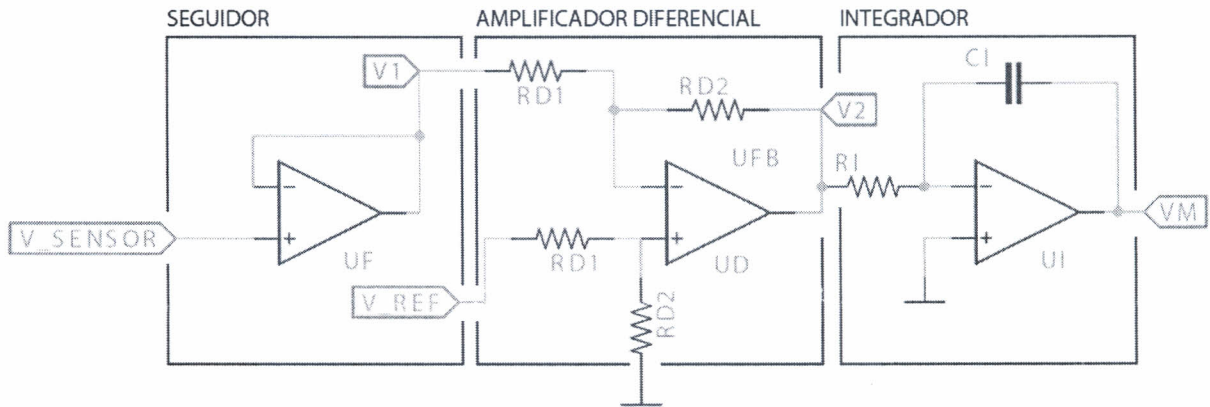
De la expresión de la transferencia del ventilador

$$\frac{Q_{AIRE}}{V_M}(s) = \frac{\alpha}{\beta + s}$$

$$\beta \cdot Q_{AIRE} + \dot{Q}_{AIRE} = \alpha \cdot V_M$$

$$\dot{Q}_{AIRE} = \alpha \cdot V_M - \beta \cdot Q_{AIRE}$$

2.



- $V_1 = V_{sensor}$
- $V_2 = \left(\frac{R_{D2}}{R_{D1}}\right) (V_{REF} - V_1)$
- $V_M(s) = -\frac{1}{C_I R_I s} V_2$

Encadenando todos los bloques:

$$V_M = -\frac{1}{C_I R_I s} \left(\frac{R_{D2}}{R_{D1}}\right) (V_{REF} - V_{sensor})$$

3.

La única no linealidad del sistema se encuentra en el sub-bloque $T_c = f(Q_{AIRE}, P_{MCU}, T_{amb})$

$$T_c = \frac{r_0}{(1 + c \cdot Q_{AIRE})} P_{MCU} + T_{amb}$$

$$\widetilde{T}_c = \left. \frac{\delta f(\dots)}{\delta Q_{AIRE}} \right|_{P_{op}} \cdot \widetilde{Q_{AIRE}} + \left. \frac{\delta f(\dots)}{\delta P_{MCU}} \right|_{P_{op}} \cdot \widetilde{P_{MCU}} + \left. \frac{\delta f(\dots)}{\delta T_{amb}} \right|_{P_{op}} \cdot \widetilde{T_{amb}}$$

$$\widetilde{T}_c = \frac{-r_0 \cdot c}{(1 + c \cdot Q_{AIRE_0})^2} P_{MCU_0} \cdot \widetilde{Q_{AIRE}} + \frac{r_0}{(1 + c \cdot Q_{AIRE_0})} \cdot \widetilde{P_{MCU}} + \widetilde{T_{amb}}$$

Como Q_{AIRE_0} no forma parte de las condiciones iniciales, es necesario definir su valor.

De la ecuación diferencial del ventilador,

$$T_{c0} = \frac{r_0}{(1 + c \cdot Q_{AIRE0})} P_{MCU0} + T_{amb0}$$

$$\frac{T_{c0} - T_{amb0}}{r_0 \cdot P_{MCU0}} = \frac{1}{(1 + c \cdot Q_{AIRE0})}$$

$$1 + c \cdot Q_{AIRE0} = \frac{r_0 \cdot P_{MCU0}}{T_{c0} - T_{amb0}}$$

$$Q_{AIRE0} = \left(\frac{r_0 \cdot P_{MCU0}}{T_{c0} - T_{amb0}} - 1 \right) \cdot \frac{1}{c}$$

Además, $T_{c0} = \frac{V_{sensor}}{K}$. Como el sistema tiene un integrador en el lazo, solo se estabiliza cuando $V_{sensor} = V_{ref}$

$$Q_{AIRE0} = \left(\frac{r_0 \cdot P_{MCU0}}{\frac{V_{ref0}}{K} - T_{amb0}} - 1 \right) \cdot \frac{1}{c}$$

Entonces,

$$\dot{V}_m = -\frac{1}{C_I R_I} \cdot \frac{R_{D2}}{R_{D1}} (V_{ref} - V_{sen}) = -\frac{1}{C_I R_I} \cdot \frac{R_{D2}}{R_{D1}} (V_{ref} - K \cdot T_c)$$

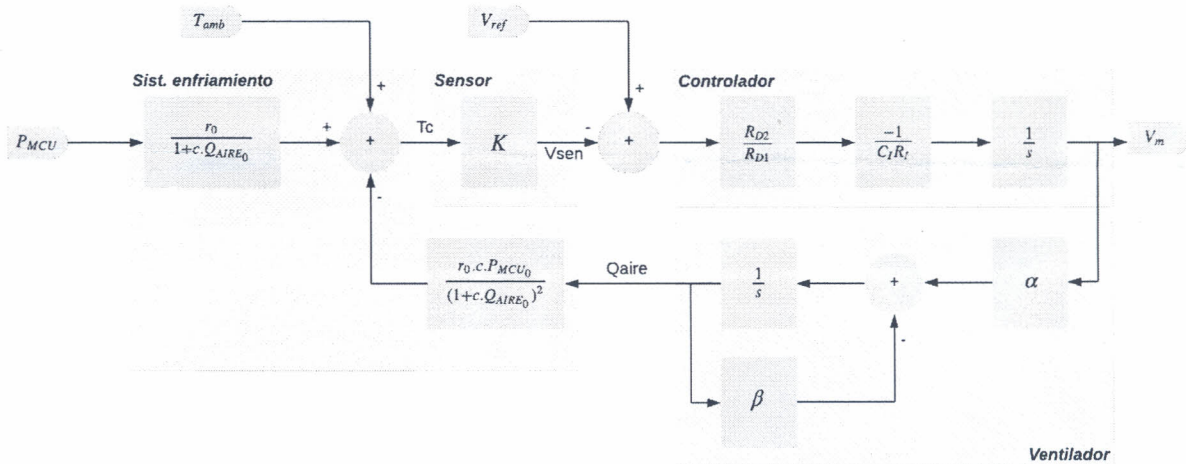
$$\dot{V}_m = \frac{1}{C_I R_I} \cdot \frac{R_{D2}}{R_{D1}} \left(\left[\frac{-K r_0 \cdot c}{(1 + c \cdot Q_{AIRE0})^2} P_{MCU0} \cdot Q_{aire} + \frac{K r_0}{(1 + c \cdot Q_{AIRE0})} \cdot P_{mcu} + K \cdot T_{amb} \right] - V_{ref} \right)$$

$$\dot{Q}_{aire} = \alpha V_m + \beta Q_{aire}$$

$$\begin{bmatrix} \dot{V}_m \\ \dot{Q}_{aire} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{-1}{C_I R_I} \cdot \frac{R_{D2}}{R_{D1}} \cdot \frac{K r_0 \cdot c}{\beta} P_{MCU0} \\ \alpha & \beta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_m \\ Q_{aire} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\frac{1}{C_I R_I} \cdot \frac{R_{D2}}{R_{D1}} & \frac{1}{C_I R_I} \cdot \frac{R_{D2}}{R_{D1}} \cdot \frac{K r_0}{(1 + c \cdot Q_{AIRE0})} & \frac{K}{C_I R_I} \cdot \frac{R_{D2}}{R_{D1}} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_{ref} \\ P_{mcu} \\ T_{amb} \end{bmatrix}$$

$$[V_m] = [1 \ 0] \begin{bmatrix} V_m \\ Q_{aire} \end{bmatrix} + [0 \ 0 \ 0] \begin{bmatrix} V_{ref} \\ P_{mcu} \\ T_{amb} \end{bmatrix}$$

4.



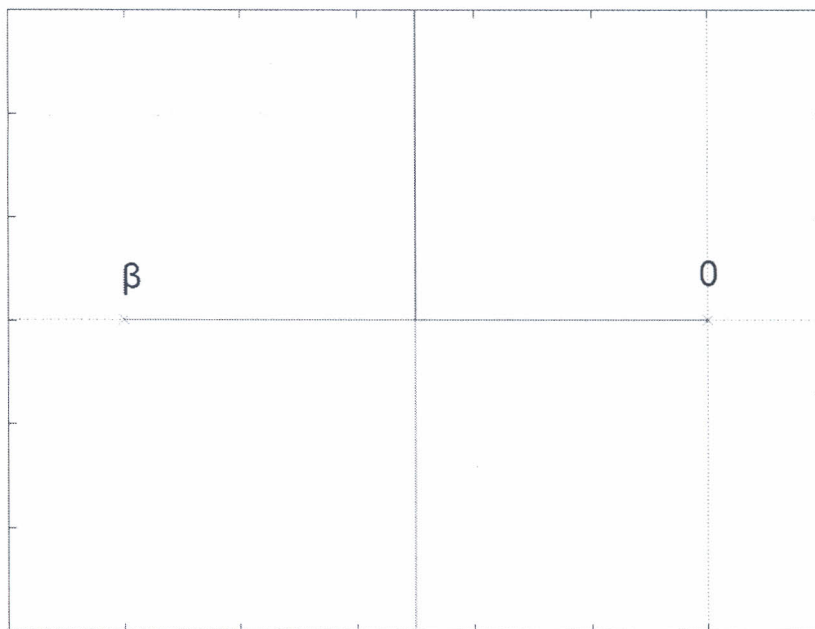
5.

Cortando la realimentación del sistema en V_{sen} , la transferencia de lazo abierto es

$$H_{OL}(s) = \frac{Kr_0 \cdot c}{(1 + c \cdot Q_{AIRE0})^2} P_{MCU0} \frac{1}{C_I R_I s} \left(\frac{R_{D2}}{R_{D1}} \right) \cdot \frac{\alpha}{\beta + s}$$

$$H_{OL}(s) = K \cdot \frac{r_0 \cdot c}{(1 + c \cdot Q_{AIRE0})^2} P_{MCU0} \frac{1}{C_I R_I} \left(\frac{R_{D2}}{R_{D1}} \right) \alpha \cdot \frac{1}{s(\beta + s)}$$

El sistema no tiene ceros, y sus polos son $\{0, -\beta\}$. Su lugar geométrico tiene la siguiente forma



El LGR tiene un último punto múltiple, que dada la forma de las asíntotas coincide con el centroide.

$$c = \frac{0 - \beta}{2} = -\frac{\beta}{2}$$

6.

Para que el sistema tenga una respuesta no oscilatoria tan rápida como sea posible, el polo menos negativo debe tener un valor absoluto tan grande como sea posible, siempre y cuando ambos sean puramente reales. Esta condición se cumple cuando ambos se ubican en el punto múltiple.

En este punto, definiendo $X = \frac{r_0 \cdot c}{(1 + c \cdot Q_{AIRE0})^2} P_{MCU0} \frac{1}{C_I R_I} \left(\frac{R_{D2}}{R_{D1}} \right) \alpha$

$$H_{OL}(s) = \frac{K \cdot X}{s(\beta + s)}$$

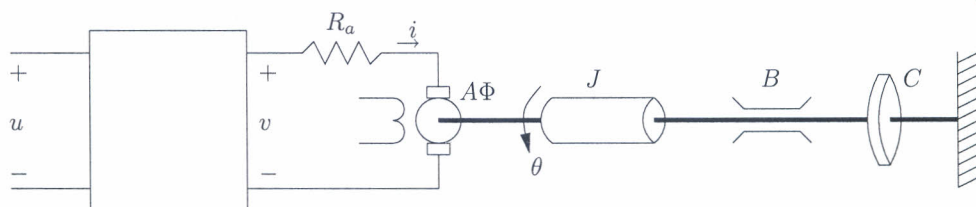
$$H_{CL}(s) = \frac{K \cdot X}{s(\beta + s) + K \cdot X}$$

$$p(s) = s^2 + \beta s + KX = \left(s + \frac{\beta}{2}\right) \left(s + \frac{\beta}{2}\right) = s^2 + \beta s + \frac{\beta^2}{4}$$

Igualando los términos independientes

$$K = \frac{\beta^2}{4X} = \frac{\beta^2}{4 \cdot \frac{r_0 \cdot c}{(1 + c \cdot Q_{AIRE0})^2} P_{MCU0} \frac{1}{C_I R_I} \left(\frac{R_{D2}}{R_{D1}} \right) \alpha}$$

7. Como $H_{OL}(s)$ tiene dos polos reales negativos y no tiene ceros, su margen de ganancia es infinito.



Solución del problema 2

1. Modelado.

Amplificador:

$$\dot{v} + 10v = 150u \quad .$$

Motor:

$$\begin{cases} v = R_a i + A\Phi\omega \\ T_m = A\Phi i \end{cases} \quad \text{donde } \omega = \dot{\theta} \quad .$$

Eje:

$$T_m - B\dot{\theta} - C\theta = J\dot{\omega} \quad .$$

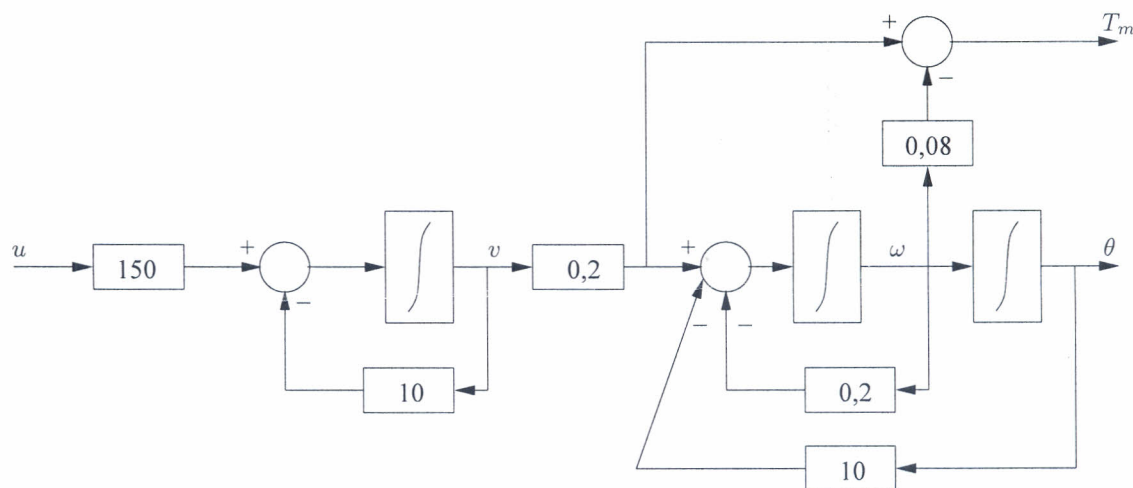
a) Representación en variables de estado:

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx \end{cases} \quad \text{donde } x = \begin{bmatrix} \theta \\ \omega \\ v \end{bmatrix}, \quad y = \begin{bmatrix} T_m \\ \theta \end{bmatrix} \quad .$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -\frac{C}{J} & -\frac{B}{J} & \frac{A\Phi}{JR_a} \\ 0 & 0 & -10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -10 & -0,2 & 0,2 \\ 0 & 0 & -10 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 150 \end{bmatrix},$$

$$C = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{(A\Phi)^2}{R_a} & \frac{A\Phi}{R_a} \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -0,08 & 0,2 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad .$$

b) Diagrama de bloques:



c) Matriz de transferencia:

$$M(s) = C(sI - A)^{-1}B = \frac{30}{(s+10)(s^2 + 0,2s + 10)} \begin{bmatrix} s^2 + 0,12s + 10 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{siendo} \quad \begin{bmatrix} T_m(s) \\ \theta(s) \end{bmatrix} = M(s)u(s) \quad .$$

2. Diseño

$$H(s) = \frac{\theta}{u}(s) = \frac{30}{(s+10)(s^2+0,2s+10)} = \frac{30}{s^3+10,2s^2+12s+100}$$

$$G^{OL}(s) = KH(s) = \frac{30K}{s^3+10,2s^2+12s+100}$$

Transferencia en lazo cerrado:

$$G^{CL}(s) = \frac{\theta}{r}(s) = \frac{G^{OL}(s)}{1+G^{OL}(s)} = \frac{30K}{s^3+10,2s^2+12s+100+30K}$$

a) Valores de $K \in \mathbb{R}$ que estabilizan el sistema realimentado.

Routh-Hurwitz:

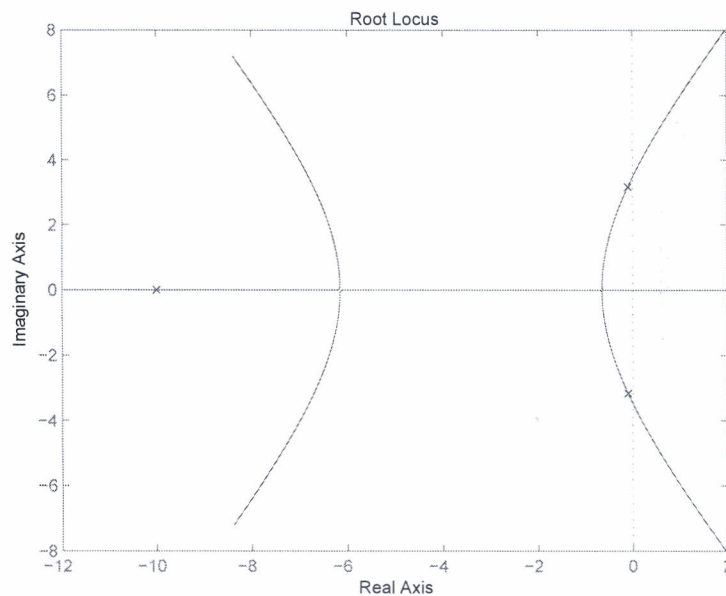
$$\begin{array}{c|cc} s^3 & 1 & 12 \\ s^2 & 10,2 & 100+30K \\ s^1 & 12 - \frac{100+30K}{10,2} & \\ s^0 & 100+30K & \end{array}$$

Sistema realimentado estable si y sólo si:

$$-3,33 \approx -\frac{10}{3} < K < \frac{56}{75} \approx 0,747$$

Para $K = -\frac{10}{3}$ una raíz en el eje imaginario en $s = 0$. Para $K = -\frac{56}{75}$ dos raíces en el eje imaginario en $s \approx \pm j3,46$.

b) Lugar de las raíces paramétrico en $K \in \mathbb{R}$.



- Polos de H : $\begin{cases} p_1 = -10 \\ p_2 = -0,1 + j3\sqrt{1,11} \approx -0,1 + j3,16 \\ p_3 = -0,1 - j3\sqrt{1,11} \approx -0,1 - j3,16 \end{cases}$
- Ceros de H : ∞ (triple).

- Cantidad de ramas: 3 .
- Simetría: eje real.
- Asíntotas:
 - para $K > 0$: $\theta_k = \frac{(2k+1)\pi}{3}$ con $k = 0, 1, 2$;
 - para $K < 0$: $\theta_k = \frac{2k\pi}{3}$ con $k = 0, 1, 2$.
- Centroide: $\frac{-10-0,1-0,1}{3} = -3,4$.
- Lugar de las raíces en el eje real:
 - para $K > 0$: $(-\infty, -10)$;
 - para $K < 0$: $(-10, +\infty)$.
- Ángulos de partida para $K > 0$:
 - $p_1 = -10$: $\varphi_{p_1}^{partida} = -180^\circ$;
 - $p_2 = -0,1 + j3\sqrt{1,11}$: $\varphi_{p_2}^{partida} = \left(\frac{\pi}{2} - \arctan\left(\frac{3\sqrt{1,11}}{9,9}\right)\right) rad \approx 72,3^\circ$ y
 - $p_3 = \bar{p}_2$: $\varphi_{p_3}^{partida} = -\varphi_{p_2}^{partida} \approx -72,3^\circ$.
- Intersecciones con el eje imaginario: ver Routh-Hurwitz en la parte anterior.
- Puntos múltiples. $\frac{dH(s)}{ds} = 0 \Leftrightarrow 3s^2 + 20,4s + 12 = 0$.
 $3s^2 + 20,4s + 12 = 0 \Leftrightarrow s = s_{m1} \approx -6,15$ ó $s = s_{m1} \approx -0,650$.
 $H(s_{m1}) > 0$ y $H(s_{m2}) > 0$; así que s_{m1} y s_{m2} pertenecen al lugar geométrico negativo.

c) Determinación de K para que el sobretiro de la respuesta a una entrada en escalón sea de 16,3 %.

Transferencia en lazo cerrado:

$$G^{CL}(s) = \frac{30K}{s^3 + 10,2s^2 + 12s + 100 + 30K} = \frac{30K}{(s + \sigma)(s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2)}$$

Sobretiro: $M_p = 0,163 \Rightarrow \zeta = \frac{-\ln M_p}{\sqrt{\pi^2 + \ln^2 M_p}} \approx 0,500$. donde se supuso que el polo real es dominado por el par de polos conjugados.

$$\begin{cases} 2\zeta\omega_n + \sigma = 10,2 \\ \omega_n^2 + 2\zeta\omega_n\sigma = 12 \\ \sigma\omega_n^2 = 100 + 30K \\ \zeta \approx 0,500 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \sigma \approx 9,02 \\ \omega_n \approx 1,18 \\ K \approx -2,92 \end{cases}$$

Para $K \approx -2,92$ los polos de G^{CL} son:

$$\begin{aligned} s_1 &= -\sigma \approx -9,02 \\ s_2 &= -\zeta\omega_n + j\sqrt{1 - \zeta^2}\omega_n \approx -0,588 + j1,02 \\ s_3 &= -\zeta\omega_n - j\sqrt{1 - \zeta^2}\omega_n \approx -0,588 - j1,02 \end{aligned}$$

Se verifica que el par de polos conjugados domina al polo real:

$$9,02 \approx |s_1| \gg |\zeta\omega_n| \approx 0,588$$

Para que el sobretiro a una entrada escalón sea de 16,3 % hay que tomar $K \approx -2,92$.

d) El error en régimen ante una entrada escalón unitario es:

$$e_{ss} = \frac{1}{1 + \lim_{s \rightarrow 0} G^{OL}(s)} = \frac{1}{1 + \frac{30K}{100}} \approx 8,01$$