



EXAMEN - GEOMETRÍA Y ÁLGEBRA LINEAL 1

Viernes 9 de diciembre de 2022
(8:00 - 11:00)

No. de Examen

Nombre y Apellido

Cédula de Identidad

Firma

Respuestas			
MO1	MO2	MO3	MO4

PARTE I: Múltiple Opción (total de 60 puntos)

- 15 puntos por cada respuesta correcta, -2 punto por cada respuesta incorrecta, y 0 puntos si no contesta.
- En las casillas de arriba, debe marcar la opción que considere correcta (en caso de querer responder).
- En cada pregunta, dentro de las seis opciones, solo una es correcta.

MO 1. Sea $A \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{R})$ ($n \geq 3$) la matriz dada por

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Entonces, $|A|$ (el determinante de A) es igual a:

- (A) -2 (D) 0
(B) $(-2)^n$ (E) 2^n
(C) -2^n (F) 2

MO 2. Sea S_λ el sistema de ecuaciones dado por

$$\begin{cases} \lambda x + y = 0, \\ x + \lambda y + z = 4, \\ x + y + \lambda z = 1. \end{cases}$$

Entonces:

- (A) S_λ es compatible para todo λ . (D) No existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que S_λ es incompatible.
(B) S_{-1} es incompatible. (E) S_2 es compatible determinado.
(C) Existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que S_λ es compatible indeterminado. (F) S_λ es compatible determinado si y solo si $\lambda \neq \pm 1$.

MO 3. Considere las rectas r y s en $\mathbb{R}^3$ dadas por

$$r: \begin{cases} x + y + z = a, \\ x - y - z = b. \end{cases} \quad y \quad s: \begin{cases} x + y + z = -a, \\ x - y - z = -b. \end{cases}$$

donde $a, b \in \mathbb{R}$. Entonces:

- (A) Existen $a, b \in \mathbb{R}$ tales que r y s se intersectan solamente en un punto. (D) Para todo $a, b \in \mathbb{R}$, se cumple que r y el plano $y - z = 1$ se intersectan en un solo punto.
(B) Para todo $a, b \in \mathbb{R}$, la intersección entre r y s es vacía. (E) Si $a = 1$ y $b = 1$, entonces la distancia entre r y s es estrictamente mayor que 2.
(C) Si $a = 1$ y $b = 0$ entonces r representa un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^3$. (F) Existen $a, b \in \mathbb{R}$ tales que r y s están contenidas en el plano $y - z = 1$.

1/7

MO 4. Sea V un espacio vectorial real de dimensión $n \geq 1$ y sea $B = \{v_1, \dots, v_m\}$ un subconjunto finito de V con $m \geq 1$. Considere la función $f: \mathbb{R}^m \rightarrow V$ dada por

$$f(\alpha_1, \dots, \alpha_m) = \sum_{i=1}^m \alpha_i v_i$$

para todo $(\alpha_1, \dots, \alpha_m) \in \mathbb{R}^m$. Entonces:

- (A) Si f es inyectiva entonces $m \leq n$.
 (B) Si $m > n$ entonces f es inyectiva.
 (C) Si $m \geq n$ entonces f es sobreyectiva.
 (D) Si f es inyectiva entonces B es base de V .
 (E) Si f es sobreyectiva entonces B es base de V .
 (F) Si $m < n$ entonces f es sobreyectiva.

Recuerde que una función $f: A \rightarrow B$ es:

- **inyectiva** si para todo $x, y \in A$, se cumple que $f(x) = f(y)$ implica $x = y$;
- **sobreyectiva** si para todo $b \in B$, existe $x \in A$ tal que $f(x) = b$.



PARTE II: Desarrollo (total de 40 puntos)

- Justifique detalladamente todas sus respuestas.
- Entregue sus respuestas en las hojas que le fueron entregadas, e identifíquelas con nombre, apellido y cédula.

D1. Considere el espacio vectorial real $\mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{R})$ de matrices cuadradas $n \times n$ con entradas reales. Indique si los siguientes subconjuntos son subespacios vectoriales de $\mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{R})$ o no. En caso afirmativo, dar una demostración. En caso negativo, indique por qué y ofrezca un contraejemplo.

- (i) $S_1 = \{A \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{R}) / A \text{ es invertible}\}$. (5 puntos)
 (ii) $S_2 = \{A \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{R}) / A^2 = A\}$. (5 puntos)
 (iii) $S_3 = \{A \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{R}) / A = A^t \text{ y } \text{tr}(A) = 0\}$. (5 puntos)

Notación:

- $A^2 = A \cdot A$.
- A^t denota la traspuesta de A .
- $\text{tr}(A)$ denota la traza de A (es decir, la suma de todos los elementos de la diagonal de A).

D2. Sean U, V, W tres puntos no colineales de $\mathbb{R}^3$ y distintos del origen O . Consideramos el conjunto de vectores $\{u, v, w\} \subset \mathbb{R}^3$ dado por

$$u = \overrightarrow{OU}, \quad v = \overrightarrow{OV} \quad \text{y} \quad w = \overrightarrow{OW}.$$

Es decir, $u = \overrightarrow{OU}$ es el vector con punto inicial en O y punto final en U (v y w se definen de la misma manera). Demuestre o dé contraejemplos para las siguientes afirmaciones:

- (i) El subespacio $[u, u - v, u + v + w]$ tiene dimensión 2. (7 puntos)
 (ii) Si $\{u, v, w\}$ no genera $\mathbb{R}^3$, entonces $[u \wedge v, u \wedge w, v \wedge w]$ es un subespacio de dimensión 1. (9 puntos)
 (iii) Si $a \neq 0$ o $b \neq 0$, entonces el subespacio $[u, u + av, u - bw]$ tiene dimensión 1. (9 puntos)

Puntajes (solo para uso del equipo docente)										
MO1	MO2	MO3	MO4	D1-(i)	D1-(ii)	D1-(iii)	D2-(i)	D2-(ii)	D2-(iii)	TOTAL

Examen - Geometría y Álgebra Lineal 1

Viernes 9 de diciembre de 2022
(8:00 - 11:00)



0000

No. de Examen

John Doe

Nombre y Apellido

0.000.000-0

Cédula de Identidad

JD

Firma

Respuestas			
MO1	MO2	MO3	MO4
C	E	D	A

PARTE I: Múltiple Opción

MO 1. Sea $A \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{R})$ ($n \geq 3$) la matriz dada por

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Entonces, $|A|$ (el determinante de A) es igual a:

- (A) -2 (D) 0
 (B) $(-2)^n$ (E) 2^n
 (C) -2^n (F) 2

Solución: La respuesta correcta es (C). Usando las propiedades del determinante (intercambio de filas y linealidad en cada fila), se tiene que

$$A = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 2 \\ 0 & 2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 2 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 2 \end{vmatrix} = - \underbrace{(2 \cdot 2 \cdots 2)}_{n \text{ veces}} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{vmatrix} = -2^n.$$

MO 2. Sea S_λ el sistema de ecuaciones dado por

$$\begin{cases} \lambda x + y = 0, \\ x + \lambda y + z = 4, \\ x + y + \lambda z = 1. \end{cases}$$

Entonces:

- (A) S_λ es compatible para todo λ . (D) No existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que S_λ es incompatible.
 (B) S_{-1} es incompatible. (E) S_2 es compatible determinado.
 (C) Existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que S_λ es compatible indeterminado. (F) S_λ es compatible determinado si y solo si $\lambda \neq \pm 1$.



Solución: La respuesta correcta es (E). Considere la matriz ampliada de S_λ :

$$\left(\begin{array}{ccc|c} \lambda & 1 & 0 & 0 \\ 1 & \lambda & 1 & 4 \\ 1 & 1 & \lambda & 1 \end{array} \right),$$

Tenemos que

$$\begin{vmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 1 & \lambda & 1 \\ 1 & 1 & \lambda \end{vmatrix} = (\lambda - 1)(\lambda^2 + \lambda - 1). \quad (1)$$

- (A) Falsa. Para $\lambda = 1$ se tiene que $4 = x + y + z = 1$, por lo que S_1 es incompatible.
- (B) Falsa. Para $\lambda = -1$ se tiene que el determinante en (1) vale 2. Por lo tanto, S_{-1} es compatible determinado.
- (C) Falsa. Por el cálculo hecho es (1), se tiene que los valores $\lambda = 1$ y $\lambda = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$ anulan dicho determinante. Por otro lado,

$$\begin{vmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 1 & \lambda & 4 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (\lambda - 1)(\lambda - 3),$$

donde claramente $\frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$ no son raíces. Entonces, para $\frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$, el determinante anterior no se anula. Por la Regla de Cramer 2, se tiene que $S_{\frac{-1+\sqrt{5}}{2}}$ y $S_{\frac{-1-\sqrt{5}}{2}}$ son incompatibles. Para $\lambda = 1$, se tiene por la solución de (A) que S_1 es incompatible. Para el resto de valores de λ , S_λ es compatible determinado porque la matriz asociada del sistema tiene determinante no nulo.

- (D) Falsa. Ver solución de (A).
- (E) Verdadera. Para $\lambda = 2$, se tiene que el determinante en (1) vale 5.
- (F) Falsa. Ver solución de (A).

MO 3. Considere las rectas r y s en $\mathbb{R}^3$ dadas por

$$r: \begin{cases} x + y + z = a, \\ x - y - z = b. \end{cases} \quad y \quad s: \begin{cases} x + y + z = -a, \\ x - y - z = -b. \end{cases}$$

donde $a, b \in \mathbb{R}$. Entonces:

- (A) Existen $a, b \in \mathbb{R}$ tales que r y s se intersectan solamente en un punto.
- (B) Para todo $a, b \in \mathbb{R}$, la intersección entre r y s es vacía.
- (C) Si $a = 1$ y $b = 0$ entonces r representa un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^3$.
- (D) Para todo $a, b \in \mathbb{R}$, se cumple que r y el plano $y - z = 1$ se intersectan en un solo punto.
- (E) Si $a = 1$ y $b = 1$, entonces la distancia entre r y s es estrictamente mayor que 2.
- (F) Existen $a, b \in \mathbb{R}$ tales que r y s están contenidas en el plano $y - z = 1$.

Solución: La respuesta correcta es la (D). Notamos que las rectas r y s tienen como vectores de dirección el producto vectorial de las normales de sus planos de intersección. Como los planos con parámetro a de término independiente son paralelos, y lo mismo ocurre para los planos correspondientes a b , se tiene que r y s son o paralelas (si $a \neq 0$ o $b \neq 0$) o coincidentes (si $a = b = 0$).

- (A) Falsa. Por el razonamiento anterior.
- (B) Falsa. Por el razonamiento anterior.
- (C) Falsa. Para que r represente un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^3$, debe cumplirse, entre otras cosas, que $(0, 0, 0) \in r$. Es decir, $(0, 0, 0)$ debe satisfacer las dos ecuaciones de los planos que definen a r , a saber, $x + y + z = 1$ y $x - y - z = 0$. Vemos claramente que $(0, 0, 0)$ no satisface la primera.

(D) Verdadera. La intersección entre r y π , en caso de haberla, está dada por la solución del sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} x + y + z = a, \\ x - y - z = b, \\ y - z = 1. \end{cases}$$

La matriz asociada de dicho sistema es

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix},$$

la cual es invertible por tener determinante no nulo ($= 2$). Entonces, el sistema anterior es compatible determinado, por lo cual r y π se intersectan en un solo punto.

(E) Falsa. Para los valores $a = b = 1$ tenemos que $(1, 0, 0) \in r$ y $(-1, 0, 0) \in s$. Luego

$$\text{dist}(r, s) \leq \text{dist}((1, 0, 0), (-1, 0, 0)) = 2.$$

(F) Falsa. Ver el razonamiento en (D).

MO 4. Sea V un espacio vectorial real de dimensión $n \geq 1$ y sea $B = \{v_1, \dots, v_m\}$ un subconjunto finito de V con $m \geq 1$. Considere la función $f: \mathbb{R}^m \rightarrow V$ dada por

$$f(\alpha_1, \dots, \alpha_m) = \sum_{i=1}^m \alpha_i v_i$$

para todo $(\alpha_1, \dots, \alpha_m) \in \mathbb{R}^m$. Entonces:

(A) Si f es inyectiva entonces $m \leq n$.

(D) Si f es inyectiva entonces B es base de V .

(B) Si $m > n$ entonces f es inyectiva.

(E) Si f es sobreyectiva entonces B es base de V .

(C) Si $m \geq n$ entonces f es sobreyectiva.

(F) Si $m < n$ entonces f es sobreyectiva.

Solución: Notamos lo siguiente:

- Si f es inyectiva, entonces B es LI. En efecto, Supongamos que tenemos

$$\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_m v_m = \vec{0}.$$

Entonces,

$$f(\alpha_1, \dots, \alpha_m) = \vec{0} = f(0, \dots, 0).$$

Como f es inyectiva, se tiene que $(\alpha_1, \dots, \alpha_m) = (0, \dots, 0)$, es decir, $\alpha_k = 0$ para todo $1 \leq k \leq m$. Por lo tanto, B es LI.

- Si f es sobreyectiva, entonces B genera a V . En efecto, sea $v \in V$. Al ser f sobreyectiva, existe $(\alpha_1, \dots, \alpha_m) \in \mathbb{R}^m$ tal que

$$v = f(\alpha_1, \dots, \alpha_m) = \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_m v_m.$$

Por lo tanto, B genera a V .

(A) Verdadera. Si f es inyectiva, entonces B es LI. Todo conjunto LI de V tiene cardinalidad menor o igual a la dimensión de V , por lo cual $m \leq n$.

(B) Falsa. Si $m > n$, entonces B es LD (ya que todo conjunto LI de V tiene como mucho n vectores). Luego, existen $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ no todos nulos tales que

$$\vec{0} = f(\alpha_1, \dots, \alpha_m) = \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_m v_m.$$

Por lo tanto, f no es inyectiva, al ser $\vec{0} \in V$ imagen de $(\alpha_1, \dots, \alpha_m)$ y de $(0, \dots, 0)$.

(C) Falsa. Considere $m = n = 2$, $V = \mathbb{R}^2$ y $B = \{(1, 0), (2, 0)\}$. Para $(0, 1) \in V$, no existe $(\alpha_1, \alpha_2) \in \mathbb{R}^2$ tal que $(0, 1) = f(\alpha_1, \alpha_2)$.



(D) Falsa. Por el razonamiento anterior, si f es inyectiva, entonces B es LI. Sin embargo, B no va a ser base de V cuando $m < n$.

(E) Falsa. Considere $m = 2, n = 1, V = \mathbb{R}$ y $B = \{0, 1\}$. Claramente, B no es base de V . Por otro lado, la función $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow V$ dada por

$$f(\alpha_1, \alpha_2) = \alpha_1 \cdot 0 + \alpha_2 \cdot 1 = \alpha_2$$

es la proyección de $\mathbb{R}^2$ sobre el eje vertical, que claramente es una función sobreyectiva.

(F) Falsa. Considere $m = 1, n = 2, V = \mathbb{R}^2$ y $B = \{(1, 0)\}$. La función $f: \mathbb{R} \rightarrow V$ dada por

$$f(\alpha) = \alpha (1, 0) = (\alpha, 0)$$

no es sobreyectiva.

PARTE II: Desarrollo

D1. Considere el espacio vectorial real $\mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{R})$ de matrices cuadradas $n \times n$ con entradas reales. Indique si los siguientes subconjuntos son subespacios vectoriales de $\mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{R})$ o no. En caso afirmativo, dar una demostración. En caso negativo, indique por qué y ofrezca un contraejemplo.

(i) $S_1 = \{A \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{R}) / A \text{ es invertible}\}$. (5 puntos)

(ii) $S_2 = \{A \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{R}) / A^2 = A\}$. (5 puntos)

(iii) $S_3 = \{A \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{R}) / A = A^t \text{ y } \text{tr}(A) = 0\}$. (5 puntos)

Solución:

(i) S_1 no es subespacio vectorial de $\mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{R})$ ya que la matriz nula no pertenece a S_1 . La matriz nula no es invertible, y todo subespacio de $\mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{R})$ debe contener al vector nulo de $\mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{R})$.

(ii) S_2 no es subespacio vectorial de $\mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{R})$, ya que S_2 no es cerrado por multiplicación por escalares. En efecto, considere la matriz identidad I de tamaño 2 (tomando $n = 2$ para un contraejemplo), la cual pertenece claramente a S_2 . Note que

$$2I = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix},$$
$$(2I)^2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = 2I.$$

Por lo tanto, $2I \notin S_2$.

(iii) S_3 sí es subespacio de $\mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{R})$.

- La matriz nula $0 \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{R})$ ya que $0 = 0^t$ y $\text{tr}(0) = 0$, claramente. Por lo tanto S_3 no es vacío.
- Sean $A, B \in S_3$. Entonces, $A = A^t, B = B^t$ y $\text{tr}(A) = \text{tr}(B) = 0$. Luego,

$$A + B = A^t + B^t = (A + B)^t$$

y

$$\text{tr}(A + B) = \text{tr}(A) + \text{tr}(B) = 0 + 0 = 0.$$

Por lo tanto, $A + B \in S_3$.

- Sea $A \in S_3$ y $\alpha \in \mathbb{R}$. Entonces, $A = A^t$ y $\text{tr}(A) = 0$. Luego,

$$\alpha A = \alpha A^t = (\alpha A)^t$$

y

$$\text{tr}(\alpha A) = \alpha \text{tr}(A) = \alpha \cdot 0 = 0.$$

Por lo tanto, $\alpha A \in S_3$.

Concluimos que S_3 es subespacio de $\mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{R})$.

67



D2. Sean U, V, W tres puntos no colineales de $\mathbb{R}^3$ y distintos del origen O . Consideramos el conjunto de vectores $\{u, v, w\} \subset \mathbb{R}^3$ dado por

$$u = \overrightarrow{OU}, \quad v = \overrightarrow{OV} \quad \text{y} \quad w = \overrightarrow{OW}.$$

Es decir, $u = \overrightarrow{OU}$ es el vector con punto inicial en O y punto final en U (v y w se definen de la misma manera). Demuestre o dé contraejemplos para las siguientes afirmaciones:

(i) El subespacio

$$[u, u - v, u + v + w]$$

tiene dimensión 2.

Solución: Falso. Para los puntos $U = (1, 0, 0)$, $V = (0, 1, 0)$ y $W = (0, 0, 1)$, se tiene que $u = (1, 0, 0)$, $u - v = (1, -1, 0)$ y $u + v + w = (1, 1, 1)$. Así,

$$[u, u - v, u + v + w] = [(1, 0, 0), (1, -1, 0), (1, 1, 1)]$$

es un subespacio de dimensión 3.

(ii) Si $\{u, v, w\}$ no genera $\mathbb{R}^3$, entonces

$$[u \wedge v, u \wedge w, v \wedge w]$$

es un subespacio de dimensión 1.

Solución: Verdadero. Si $\{u, v, w\}$ no genera a $\mathbb{R}^3$, como los puntos U, V y W no son colineales, y además son distintos del origen, el subespacio $[u, v, w]$ tiene dimensión 2, es decir, es un plano en $\mathbb{R}^3$ que pasa por el origen. Por otro lado, los vectores $u \wedge v$, $u \wedge w$ y $v \wedge w$ son ortogonales al plano $[u, v, w]$, y por lo tanto son colineales. Además, al menos uno de estos vectores es diferente de cero, pues los vectores u, v, w no pueden ser los tres colineales porque los puntos U, V, W no son colineales. Por lo tanto, al ser $u \wedge v, u \wedge w$ y $v \wedge w$ vectores colineales y no todos nulos, se tiene que $[u \wedge v, u \wedge w, v \wedge w]$ tiene dimensión 1.

(iii) Si $a \neq 0$ o $b \neq 0$, entonces el subespacio

$$[u, u + av, u - bw]$$

tiene dimensión 1.

Solución: Falso. Considere $u = (1, 0, 0)$, $v = (0, 1, 0)$ y $w = (0, 0, 1)$. Entonces,

$$[u, u + av, u - bw] = [(1, 0, 0), (1, a, 0), (1, 0, -b)].$$

La dimensión de este subespacio es justamente el rango de la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & -b \end{pmatrix}.$$

Como $a \neq 0$ o $b \neq 0$, se tiene que $\text{rg}(A) \geq 2$. Por lo tanto, $\dim([u, u + av, u - bw]) \geq 2$ para nuestra elección de u, v y w .

