

Examen - Geometría y Álgebra Lineal 1

Viernes 14 de julio de 2023 (8:00 - 11:00)

N.º de Parcial

Nombre y Apellido

Cédula de Identidad

Firma

Instrucciones

- Identifique con sus datos completos el presente documento.
- Al finalizar, debe entregar este documento al personal docente.
- Debe colocar sus respuestas en las casillas que aparecen en esta página.
- Solamente se corregirá la información que esté dentro de las casillas.

Respuestas						
VoF 1	VoF 2	VoF 3	VoF 4	VoF 5	VoF 6	VoF 7



Respuestas					
MO 1	MO 2	MO 3	MO 4	MO 5	MO 6

Primera Parte: Verdadero o Falso

Puntajes: 28 puntos el total de esta parte. Se otorgan 4 puntos por cada respuesta correcta, -2 puntos por cada respuesta incorrecta, y 0 puntos si no contesta.

Enunciado: Determine cuáles de las siguientes siete afirmaciones son verdaderas y cuáles falsas.

Para matrices $A, B \in M_{3 \times 3}(\mathbb{R})$ y $C \in M_{3 \times 2}(\mathbb{R})$ cualesquiera, es tiene que:

- (1) $(A \cdot B \cdot C)^2$ es un producto válido entre matrices (es decir, $A \cdot B \cdot C$ es conformable consigo misma).
- (2) $(A \cdot B)^2 = A^2 \cdot B^2$.
- (3) Si $A \cdot C = O_{3 \times 2}$, entonces $A = O_{3 \times 3}$ o $C = O_{3 \times 2}$.
- (4) Si existe un entero positivo k tal que $A^k = O_{3 \times 3}$, entonces $\det(A) = 0$.
- (5) $A \cdot B$ es invertible si, y solamente si, A es invertible y B es invertible.
- (6) Si $E_1, \dots, E_k \in M_{3 \times 3}(\mathbb{R})$ es una sucesión de matrices elementales cualesquiera tales que

$$E_k \cdots E_1 \cdot A = B,$$

entonces $\det(A) = \det(B)$.

(7) Si $A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$, entonces $\det \begin{pmatrix} -e & -f & -d \\ -h & -i & -g \\ -b & -c & -a \end{pmatrix} = -\det(A)$.



Glosario:

- Si k es un entero positivo, entonces A^k denota el producto de la matriz A consigo misma k veces, es decir, $A^k = A \cdot A \cdots A$ (k veces).
- $O_{m \times n}$ denota la matriz nula de m filas y n columnas.

Segunda Parte: Múltiple Opción

Puntajes: 72 puntos el total de esta parte. Se otorgan 12 puntos por cada respuesta correcta, -3 puntos por cada respuesta incorrecta, y 0 puntos si no contesta.

MO 1. Una partícula en $\mathbb{R}^3$ se mueve según

$$P_t = (t - 3, 2t - 2, 3t - 1).$$

Es decir, P_t describe la posición de la partícula en cada instante $t \in \mathbb{R}$. Fijado el punto $A = (1, 2, 3)$, se considera la recta r_t en $\mathbb{R}^3$ que pasa por A y por P_t . Entonces, el instante $t \in \mathbb{R}$ en el cual la recta r_t es ortogonal al plano $\pi: 2x - y + 3z = 1$ es:

(A) $t = -4/3$.

(C) $t = 12/5$.

(B) $t = 16/9$.

(D) No existe tal t .

Sugerencia: Puede ser útil recordar que una recta r y un plano π son ortogonales si, y solamente si, $\vec{d}$ y $\vec{n}$ son colineales (es decir, $\vec{d} \wedge \vec{n} = \vec{0}$), para cualquier dirección $\vec{d}$ de r y cualquier normal $\vec{n}$ del plano.

MO 2.

Si $\det \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} = -2$, entonces $\det \begin{pmatrix} a & b & c+a & 0 & 0 & 0 \\ d & e & f+d & 0 & 0 & 0 \\ g & h & i+g & 0 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 5 & g & h & -i \\ 4 & 1/2 & 1 & a & b & -c \\ 3 & 0 & -2 & d & e & -f \end{pmatrix}$ es igual a:

(A) -4.

(C) 0.

(B) -2.

(D) 2.



MO 3. Se consideran los subespacios W_1 y W_2 de $\mathcal{M}_{2 \times 2}(\mathbb{R})$ definidos a continuación:

$$W_1 = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2 \times 2}(\mathbb{R}) / a + d = 0 \right\},$$

$$W_2 = \left\{ \begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2 \times 2}(\mathbb{R}) / x + y = 0 \text{ y } z + w = 0 \right\}.$$

Entonces:

(A) $\dim(W_1 + W_2) = 2$.

(C) $\dim(W_1 + W_2) = 3$.

(B) $\dim(W_1 + W_2) = 4$.

(D) $\dim(W_1 + W_2) = 1$.

MO 4. Sea $T: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathcal{M}_{2 \times 2}(\mathbb{R})$ la transformación lineal dada por

$$T(x, y, z) = \begin{pmatrix} x - y & y \\ y & y - z \end{pmatrix}.$$

Por otro lado, se considera el espacio vectorial $\mathcal{P}_3[t]$ de polinomios de grado menor o igual a 3 y coeficientes reales, junto con la transformación lineal $S: \mathcal{M}_{2 \times 2}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{P}_3[t]$ donde, para cada $A \in \mathcal{M}_{2 \times 2}(\mathbb{R})$, $S(A)$ es el polinomio dado por

$$S(A)(t) = \begin{pmatrix} 1 & t \end{pmatrix} \cdot A \cdot \begin{pmatrix} t \\ t^2 \end{pmatrix}.$$

Entonces, $\dim(\text{Ker}(S)) + \dim(\text{Im}(T))$ es igual a:

- (A) 0. (C) 3.
(B) 4. (D) 2.

MO 5. Sea $\mathcal{A} = \{\vec{u}, \vec{v}\} \subseteq \mathbb{R}^3$ un conjunto linealmente independiente. Para

$$\mathcal{B} = \{\vec{u} + \vec{w}, \vec{v} + \vec{w}\}$$

con $\vec{w} \in \mathbb{R}^3$ y $\vec{w} \neq \vec{0}$, se tiene que:

- (A) El conjunto $\mathcal{B}$ es linealmente independiente para todo $\vec{w} \in \mathbb{R}^3$. (C) $\mathcal{B}$ es linealmente dependiente si y solo si existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que $\vec{w} = \lambda(\vec{u} - \vec{v}) - \vec{v}$.
(B) Si $\vec{w} \in [\vec{u}, \vec{v}]$ entonces $\mathcal{B}$ es linealmente dependiente. (D) Si $\vec{w} \neq -\vec{u}$ y $\vec{w} \neq -\vec{v}$ entonces $\mathcal{B}$ es linealmente independiente.

MO 6. Sea $T: \mathcal{P}_2[t] \rightarrow \mathbb{R}^3$ una función que cumple lo siguiente

$$T(2t^2 - 2t + 1) = (1, 2, 3),$$

$$T(3t^2 - 4t - 1) = (1, 4, 5),$$

$$T(t^2 + 3) = (1, 0, 1),$$

$$T(2t + 1) = (1, 0, 0).$$

Entonces:

- (A) Existen infinitas transformaciones lineales que cumplen las condiciones. (C) Existe una única transformación lineal T que cumple las condiciones anteriores y que además $T(2t^2 + 4t - 4) = (3, -4, 5)$.
(B) No existe T que cumpla todas las condiciones anteriores y que además sea una transformación lineal. (D) Existe una única transformación lineal T que cumple las condiciones anteriores y que además $T(2t^2 + 4t - 4) = (4, 6, 5)$.

Sugerencia: Puede ayudar saber de antemano que $\{3t^2 - 4t - 1, t^2 + 3, 2t + 1\}$ es una base de $\mathcal{P}_2[t]$.



Examen - Geometría y Álgebra Lineal 1

Viernes 14 de julio de 2023 (8:00 - 11:00)

0000

N.º de Parcial

John Doe

Nombre y Apellido

0.000.000-0

Cédula de Identidad

JD

Firma



Instrucciones

- Identifique con sus datos completos el presente documento.
- Al finalizar, debe entregar este documento al personal docente.
- Debe colocar sus respuestas en las casillas que aparecen en esta página.
- Solamente se corregirá la información que esté dentro de las casillas.

Respuestas						
VoF 1	VoF 2	VoF 3	VoF 4	VoF 5	VoF 6	VoF 7
F	F	F	V	V	F	V

Respuestas					
MO 1	MO 2	MO 3	MO 4	MO 5	MO 6
D	A	B	C	C	D

Primera Parte: Verdadero o Falso

Puntajes: 28 puntos el total de esta parte. Se otorgan 4 puntos por cada respuesta correcta, -2 puntos por cada respuesta incorrecta, y 0 puntos si no contesta.

Enunciado: Determine cuáles de las siguientes siete afirmaciones son verdaderas y cuáles falsas.

Para matrices $A, B \in M_{3 \times 3}(\mathbb{R})$ y $C \in M_{3 \times 2}(\mathbb{R})$ cualesquiera, es tiene que:

- (1) $(A \cdot B \cdot C)^2$ es un producto válido entre matrices (es decir, $A \cdot B \cdot C$ es conformable consigo misma).

Solución: Falso. La matriz $A \cdot B \cdot C$ es de tamaño 3×2 . Al no ser igual su número de filas a su número de columnas, el producto $(A \cdot B \cdot C) \cdot (A \cdot B \cdot C)$ no está bien definido.

- (2) $(A \cdot B)^2 = A^2 \cdot B^2$.

Solución: Falso. Considere por ejemplo $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (A \cdot B)^2 = \begin{pmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = A,$$

$$B^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = B,$$

$$A^2 \cdot B^2 = A \cdot B \neq (A \cdot B)^2.$$

- (3) Si $A \cdot C = O_{3 \times 2}$, entonces $A = O_{3 \times 3}$ o $C = O_{3 \times 2}$.

Solución: Falso. Considere por ejemplo $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.



Se tiene que $A \cdot C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$

- (4) Si existe un entero positivo k tal que $A^k = O_{3 \times 3}$, entonces $\det(A) = 0$.

Solución: Verdadero. Por propiedades del determinante, se tiene que

$$0 = \det(O_{3 \times 3}) = \det(A^k) = [\det(A)]^k.$$

De donde, $\det(A) = 0$.

- (5) $A \cdot B$ es invertible si, y solamente si, A es invertible y B es invertible.

Solución: Verdadero. Recuerde que una matriz cuadrada C es invertible si, y solamente si, $\det(C) \neq 0$. Entonces,

$$\begin{aligned} A \cdot B \text{ es invertible} &\iff \det(A \cdot B) \neq 0 \\ &\iff \det(A) \cdot \det(B) \neq 0 \\ &\iff \det(A) \neq 0 \text{ y } \det(B) \neq 0 \\ &\iff A \text{ es invertible y } B \text{ es invertible.} \end{aligned}$$



- (6) Si $E_1, \dots, E_k \in \mathcal{M}_{3 \times 3}(\mathbb{R})$ es una sucesión de matrices elementales cualesquiera tales que

$$E_k \cdots E_1 \cdot A = B,$$

entonces $\det(A) = \det(B)$.

Solución: Falso. Para $k = 1$, sea E_1 la matriz elemental que corresponde a la transformación elemental de intercambio entre fila 1 y fila 2. Entonces, B es la matriz que se obtiene al intercambiar las filas 1 y 2 de la matriz A , de donde $\det(B) = -\det(A)$. Entonces, $\det(A) \neq \det(B)$ para cualquier $A \in \mathcal{M}_{3 \times 3}(\mathbb{R})$ invertible.

(7) Si $A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$, entonces $\det \begin{pmatrix} -e & -f & -d \\ -h & -i & -g \\ -b & -c & -a \end{pmatrix} = -\det(A).$

Verdadero: Aplicando propiedades del determinante, tenemos que:

$$\det \begin{pmatrix} -e & -f & -d \\ -h & -i & -g \\ -b & -c & -a \end{pmatrix} = (-1)^3 \det \begin{pmatrix} e & f & d \\ h & i & g \\ b & c & a \end{pmatrix} \quad (\text{se aplica la homogeneidad en cada fila})$$

$$\begin{aligned}
 &= -\det \begin{pmatrix} e & f & d \\ h & i & g \\ b & c & a \end{pmatrix} = -\det \begin{pmatrix} d & e & f \\ g & h & i \\ a & b & c \end{pmatrix} \quad (\text{se hacen dos intercambios de columnas}) \\
 &= -\det \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} = -\det(A). \quad (\text{se hacen dos intercambios de filas})
 \end{aligned}$$



Glosario:

- Si k es un entero positivo, entonces A^k denota el producto de la matriz A consigo misma k veces, es decir, $A^k = A \cdot A \cdots A$ (k veces).
- $O_{m \times n}$ denota la matriz nula de m filas y n columnas.

Segunda Parte: Múltiple Opción

Puntajes: 72 puntos el total de esta parte. Se otorgan 12 puntos por cada respuesta correcta, -4 puntos por cada respuesta incorrecta, y 0 puntos si no contesta.

MO 1. Una partícula en $\mathbb{R}^3$ se mueve según

$$P_t = (t - 3, 2t - 2, 3t - 1).$$

Es decir, P_t describe la posición de la partícula en cada instante $t \in \mathbb{R}$. Fijado el punto $A = (1, 2, 3)$, se considera la recta r_t en $\mathbb{R}^3$ que pasa por A y por P_t . Entonces, el instante $t \in \mathbb{R}$ en el cual la recta r_t es ortogonal al plano $\pi: 2x - y + 3z = 1$ es:

(A) $t = -4/3$.

(C) $t = 12/5$.

(B) $t = 16/9$.

(D) No existe tal t .

Sugerencia: Puede ser útil recordar que una recta r y un plano π son ortogonales si, y solamente si, $\vec{d}$ y $\vec{n}$ son colineales (es decir, $\vec{d} \wedge \vec{n} = \vec{0}$), para cualquier dirección $\vec{d}$ de r y cualquier normal $\vec{n}$ del plano.

Solución: La respuesta es (D). Sea $\vec{d}_t$ la dirección de r_t dada por

$$\vec{d}_t = P_t - A = (t - 3, 2t - 2, 3t - 1) - (1, 2, 3) = (t - 4, 2t - 4, 3t - 4) = t(1, 2, 3) - 4(1, 1, 1).$$

Notamos además que $\vec{n} = (2, -1, 3)$ es una normal de π . Veamos si existe $t \in \mathbb{R}$ tal que $\vec{d}_t \wedge \vec{n} = \vec{0}$:

$$\begin{aligned} (0, 0, 0) &= \vec{d}_t \wedge \vec{n} \\ &= (t(1, 2, 3) - 4(1, 1, 1)) \wedge (2, -1, 3) \\ &= t(1, 2, 3) \wedge (2, -1, 3) - 4(1, 1, 1) \wedge (2, -1, 3) \\ &= t \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 3 \end{vmatrix} - 4 \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \end{vmatrix} \\ &= t(9, 3, -5) - 4(4, -1, -3) \\ &= (9t - 16, 3t + 4, -5t + 12). \end{aligned}$$



Entonces, $\vec{d}_t \wedge \vec{n} = \vec{0}$ si, y solamente si, $(9t - 16, 3t + 4, -5t + 12) = (0, 0, 0)$. No existe $t \in \mathbb{R}$ para que se cumpla la igualdad anterior, porque t tendría que ser al mismo tiempo $t = 16/9$, $t = -4/3$ y $t = 12/5$.

MO 2.

Si $\det \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} = -2$, entonces $\det \begin{pmatrix} a & b & c+a & 0 & 0 & 0 \\ d & e & f+d & 0 & 0 & 0 \\ g & h & i+g & 0 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 5 & g & h & -i \\ 4 & 1/2 & 1 & a & b & -c \\ 3 & 0 & -2 & d & e & -f \end{pmatrix}$ es igual a:

(A) -4.

(B) -2.

(C) 0.

(D) 2.

Solución: La respuesta es (A). Llamemos B a la matriz por bloques de la cual se nos pide calcular su determinante. Entonces, por propiedades del determinante, tenemos que:

$$\begin{aligned} \det(B) &= \det \begin{pmatrix} a & b & c+a \\ d & e & f+d \\ g & h & i+g \end{pmatrix} \cdot \det \begin{pmatrix} g & h & -i \\ a & b & -c \\ d & e & -f \end{pmatrix} = -\det \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} \cdot \det \begin{pmatrix} g & h & i \\ a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix} \\ &\quad \text{(columna 3 menos columna 1 en el primer determinante)} \\ &\quad \text{(homogeneidad en la columna 3 del segundo determinante)} \\ &= -(-2) \cdot \det \begin{pmatrix} g & h & i \\ a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix} = 2 \det \begin{pmatrix} g & h & i \\ a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix} = 2 \det \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} \quad \text{(dos intercambios de filas)} \\ &= 2 \cdot (-2) = -4. \end{aligned}$$

MO 3. Se consideran los subespacios W_1 y W_2 de $M_{2 \times 2}(\mathbb{R})$ definidos a continuación:

$$\begin{aligned} W_1 &= \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_{2 \times 2}(\mathbb{R}) / a + d = 0 \right\}, \\ W_2 &= \left\{ \begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix} \in M_{2 \times 2}(\mathbb{R}) / x + y = 0 \text{ y } z + w = 0 \right\}. \end{aligned}$$

Entonces:

(A) $\dim(W_1 + W_2) = 2$.

(C) $\dim(W_1 + W_2) = 3$.

(B) $\dim(W_1 + W_2) = 4$.

(D) $\dim(W_1 + W_2) = 1$.

Solución: La respuesta es (B). La dimensión de $W_1 + W_2$ puede calcularse mediante la fórmula

$$\dim(W_1 + W_2) = \dim(W_1) + \dim(W_2) - \dim(W_1 \cap W_2).$$



Entonces, el problema se reduce a hallar las dimensiones de W_1 , W_2 y $W_1 \cap W_2$. Las matrices del subespacio W_1 están generadas por 3 parámetros independientes (a , b y c), por lo que se puede ver que

$$\dim(W_1) = 3.$$

De manera más detallada,

$$W_1 = \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right],$$

donde las matrices generadoras forman un conjunto linealmente independiente. De manera análoga,

$$\dim(W_2) = 2,$$

ya que

$$W_2 = \left[\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \right],$$

donde las matrices generadoras forman un conjunto linealmente independiente. Finalmente, $W_1 \cap W_2$ está dado por todas las matrices de la forma

$$\begin{pmatrix} a & -a \\ c & -c \end{pmatrix}$$

donde $a - c = 0$, es decir, $c = a$. Entonces, $W_1 \cap W_2 = \left[\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \right]$, de donde

$$\dim(W_1 \cap W_2) = 1.$$

Por lo tanto,

$$\dim(W_1 + W_2) = 3 + 2 - 1 = 4.$$

MO 4. Sea $T: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathcal{M}_{2 \times 2}(\mathbb{R})$ la transformación lineal dada por

$$T(x, y, z) = \begin{pmatrix} x - y & y \\ y & y - z \end{pmatrix}.$$

Por otro lado, se considera el espacio vectorial $\mathcal{P}_3[t]$ de polinomios de grado menor o igual a 3 y coeficientes reales, junto con la transformación lineal $S: \mathcal{M}_{2 \times 2}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{P}_3[t]$ donde, para cada $A \in \mathcal{M}_{2 \times 2}(\mathbb{R})$, $S(A)$ es el polinomio dado por

$$S(A)(t) = \begin{pmatrix} 1 & t \end{pmatrix} \cdot A \cdot \begin{pmatrix} t \\ t^2 \end{pmatrix}.$$

Entonces, $\dim(\text{Ker}(S)) \cdot \dim(\text{Im}(T))$ es igual a:

- | | |
|--------|--------|
| (A) 0. | (C) 3. |
| (B) 4. | (D) 2. |



Solución: La respuesta es (C). Determinemos los subespacios $\text{Ker}(S)$ y $\text{Im}(T)$ para luego calcular sus dimensiones.

Note que T es una transformación lineal inyectiva. En efecto, si $T(x, y, z) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, se tiene que

$$\begin{pmatrix} x-y & y \\ y & y-z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

de donde claramente $x = y = z = 0$. Por el Teorema de las Dimensiones,

$$\dim(\text{Im}(T)) = \dim(\mathbb{R}^3) - \dim(\text{Ker}(T)) = 3 - 0 = 3.$$

Por otro lado, a partir de la definición de S , tenemos que

$$S(A)(t) = \begin{pmatrix} 1 & t \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} t \\ t^2 \end{pmatrix} = at + (b+c)t^2 + dt^3.$$

De donde podemos notar que $\text{Im}(S) = [t, t^2, t^3]$. Al ser $\{t, t^2, t^3\}$ un conjunto linealmente independiente en $\mathcal{P}_3[t]$, tenemos que $\dim(\text{Im}(S)) = 3$. Por el Teorema de las Dimensiones,

$$\dim(\text{Ker}(S)) = \dim(\mathcal{M}_{2 \times 2}(\mathbb{R})) - \dim(\text{Im}(S)) = 4 - 3 = 1.$$

MO 5. Sea $\mathcal{A} = \{\vec{u}, \vec{v}\} \subseteq \mathbb{R}^3$ un conjunto linealmente independiente. Para

$$\mathcal{B} = \{\vec{u} + \vec{w}, \vec{v} + \vec{w}\}$$

con $\vec{w} \in \mathbb{R}^3$ y $\vec{w} \neq \vec{0}$, se tiene que:

(A) El conjunto $\mathcal{B}$ es linealmente independiente para todo $\vec{w} \in \mathbb{R}^3$.

(C) $\mathcal{B}$ es linealmente dependiente si y solo si existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que $\vec{w} = \lambda(\vec{u} - \vec{v}) - \vec{v}$.

(B) Si $\vec{w} \in [\vec{u}, \vec{v}]$ entonces $\mathcal{B}$ es linealmente dependiente.

(D) Si $\vec{w} \neq -\vec{u}$ y $\vec{w} \neq -\vec{v}$ entonces $\mathcal{B}$ es linealmente independiente.

Solución: La respuesta es (C). Estudiemos la dependencia lineal de $\mathcal{B}$. Sabemos que $\mathcal{B}$ con dos vectores, es linealmente dependiente si, y solamente si, uno de sus vectores es múltiplo del otro. Analizaremos solamente el caso donde $\vec{u} + \vec{w}$ es múltiplo de $\vec{v} + \vec{w}$, ya que el otro caso es análogo. Entonces, existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que $\vec{u} + \vec{w} = \alpha(\vec{v} + \vec{w})$ con $\alpha \neq 1$ ya que $\mathcal{A} = \{\vec{u}, \vec{v}\}$ es linealmente independiente. Luego se tiene:

$$\vec{u} + \vec{w} = \alpha\vec{v} + \alpha\vec{w}$$

$$(1 - \alpha)\vec{w} = \alpha\vec{v} - \vec{u}$$

$$\vec{w} = \frac{\alpha}{1 - \alpha}\vec{v} - \frac{1}{1 - \alpha}\vec{u}$$

Tomando $\lambda = \frac{\alpha}{1-\alpha}$, se obtiene $\lambda + 1 = \frac{1}{1-\alpha}$, con lo cual se llega a:

$$w = \lambda \vec{v} - (\lambda + 1) \vec{u} = \lambda(\vec{v} - \vec{u}) - \vec{u}.$$

MO 6. Sea $T: \mathcal{P}_2[t] \rightarrow \mathbb{R}^3$ una función que cumple lo siguiente

$$\begin{aligned} T(2t^2 - 2t + 1) &= (1, 2, 3), & T(t^2 + 3) &= (1, 0, 1), \\ T(3t^2 - 4t - 1) &= (1, 4, 5), & T(2t + 1) &= (1, 0, 0). \end{aligned}$$

Entonces:

- | | |
|---|---|
| (A) Existen infinitas transformaciones lineales que cumplen las condiciones. | (C) Existe una única transformación lineal T que cumple las condiciones anteriores y que además $T(2t^2 + 4t - 4) = (3, -4, 5)$. |
| (B) No existe T que cumpla todas las condiciones anteriores y que además sea una transformación lineal. | (D) Existe una única transformación lineal T que cumple las condiciones anteriores y que además $T(2t^2 + 4t - 4) = (4, 6, 5)$. |

Sugerencia: Puede ayudar saber de antemano que $\{3t^2 - 4t - 1, t^2 + 3, 2t + 1\}$ es una base de $\mathcal{P}_2[t]$.

Solución: La respuesta es (D). Usemos la sugerencia de que

$$B = \{3t^2 - 4t - 1, t^2 + 3, 2t + 1\}$$

es una base de $\mathcal{P}_2[t]$. Entonces, podemos escribir los polinomios $2t^2 - 2t + 1$ y $2t^2 + 4t - 4$ de manera única como combinación lineal de los polinomios en B :

$$\begin{aligned} 2t^2 - 2t + 1 &= \frac{1}{2} \cdot (3t^2 - 4t - 1) + \frac{1}{2} \cdot (t^2 + 3), \\ T(2t^2 - 2t + 1) &= \frac{1}{2} \cdot T(3t^2 - 4t - 1) + \frac{1}{2} \cdot T(t^2 + 3) \\ &= \frac{1}{2}(1, 4, 5) + \frac{1}{2}(1, 0, 1) \\ &= (1, 2, 3). \end{aligned}$$



De lo anterior tenemos que existe una única transformación lineal T que cumple con las condiciones dadas en el enunciado. Ahora, para $2t^2 + 4t - 4$, tenemos que:

$$\begin{aligned} 2t^2 + 4t - 4 &= \frac{3}{2} \cdot (3t^2 - 4t - 1) - \frac{5}{2} \cdot (t^2 + 3) + 5 \cdot (2t + 1), \\ T(2t^2 + 4t - 4) &= \frac{3}{2} \cdot T(3t^2 - 4t - 1) - \frac{5}{2} \cdot T(t^2 + 3) + 5 \cdot T(2t + 1) \\ &= \frac{3}{2}(1, 4, 5) - \frac{5}{2}(1, 0, 1) + 5(1, 0, 0) \\ &= (4, 6, 5). \end{aligned}$$