

Examen - Geometría y Álgebra Lineal 1

Lunes 6 de febrero de 2023

(8:00 - 11:00)

No. de Examen

Nombre y Apellido

Cédula de Identidad

Firma

Respuestas			
MO1	MO2	MO3	MO4

PARTE I: Múltiple Opción (total de 60 puntos)

- 15 puntos por cada respuesta correcta, -2 punto por cada respuesta incorrecta, y 0 puntos si no contesta.
- En las casillas de arriba, debe marcar la opción que considere correcta (en caso de querer responder).

MO 1. Sea $A \in \mathcal{M}_{8 \times 8}(\mathbb{R})$ la matriz dada por

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Entonces $|A|$ (el determinante de A) es igual a:

- (A) 2^7 (D) $(-1)^7$
(B) -2^7 (E) 1
(C) 0 (F) 8.



MO 2. Sea S_λ el sistema de ecuaciones lineales dado por

$$\begin{cases} \lambda x + y + z = 0 \\ y + z = 4 \\ x + y + \lambda z = 1 \end{cases}$$

donde λ es un parámetro real ($\lambda \in \mathbb{R}$).

Entonces:

- (A) S_1 es compatible determinado. (D) S_{-1} es incompatible.
(B) S_λ es compatible determinado si y solo si $\lambda \neq 1$. (E) S_0 tiene infinitas soluciones.
(C) S_2 es compatible determinado y la suma de las coordenadas de su solución es 6. (F) No existe λ tal que S_λ sea compatible indeterminado.

MO 3. Dado $a \in \mathbb{R}$, considere r y s las rectas de $\mathbb{R}^3$ cuyas ecuaciones paramétricas están dadas por

$$r: \begin{cases} x = 0 \\ y = 4 - a\lambda \\ z = 2 + \lambda \end{cases} \quad y \quad s: \begin{cases} x = 1 \\ y = 4 + \lambda' \\ z = 2 + a\lambda' \end{cases} \quad \text{con } \lambda, \lambda' \in \mathbb{R}.$$

Entonces:

- (A) Para todo $a \in \mathbb{R}$, hay solamente un punto en r con norma igual a 5. (D) Existen valores de $a \in \mathbb{R}$ tales que la distancia entre r y s es estrictamente mayor que 1.
(B) Los vectores directores de r y s forman un ángulo de $\pi/6$ radianes (30 grados sexagesimales). (E) r , para todo $a \in \mathbb{R}$, no tiene puntos de norma menor a 5.
(C) Existe $a \in \mathbb{R}$ tal que ambas rectas están contenidas en el mismo plano. (F) Existen infinitos valores de $a \in \mathbb{R}$ tales que la distancia entre r y s es 1.

1/6

MO 4. Sea $V := \{A \in \mathcal{M}_{3 \times 3}(\mathbb{R}) \mid A = A^t \text{ y } \text{tr}(A) = 0\}$. Se consideran los conjuntos $L \subseteq G \subset V$:

$$L := \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \right\} \text{ y}$$

$$G := L \cup \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Entonces:

- (A) Existe una única base B de V tal que $L \subseteq B \subseteq G$.
 (B) Existen bases B de V tales que $B \subseteq G$ pero ninguna contiene a L .
 (C) Existen bases B de V tales que $L \subseteq B$ pero ninguna está contenida en G .
 (D) Si $B \subseteq G$, entonces B no es base de V .
 (E) Existen al menos dos bases B_1 y B_2 de V tal que $L \subseteq B_1 \subseteq G$ y $L \subseteq B_2 \subseteq G$.
 (F) Si $L \subseteq B$, entonces B no es base de V .

Observación: el ejercicio se refiere a bases, no a bases ordenadas.

PARTE II: Desarrollo (total de 40 puntos)

- Justifique detalladamente todas sus respuestas.
- Entregue sus respuestas en las hojas que le fueron entregadas, e identifíquelas con nombre, apellido y cédula.

Ejercicio D1

Se consideran los siguientes conjuntos de los respectivos espacios vectoriales con las operaciones habituales:

- $S_1 = \{p \in \mathbb{R}_7[x] : p(x) + p(-x) = 0\} \subseteq \mathbb{R}_7[x]$,
- $S_2 = \{A \in M_{n \times n}(\mathbb{R}) : \det(A) \leq 0\} \subseteq M_{n \times n}(\mathbb{R})$,
- $S_3 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 - y^2 = 0\} \subseteq \mathbb{R}^3$.

- a) Considerando S_1 , S_2 y S_3 , y las inclusiones definidas arriba, decir cuáles son subespacios vectoriales y cuáles no.
 b) 1) Para aquél o aquellos casos en que S_i sea subespacio vectorial, demostrarlo.
 2) Hallar una base y determinar la dimensión del subespacio, en cada caso.
 c) En aquél o aquellos casos que S_i no sea subespacio mostrar, vía contraejemplo(s), por qué no es (son) subespacio(s).

(25 puntos)

Ejercicio D2

Sea $A \in \mathcal{M}_{3 \times 3}(\mathbb{R})$ una matriz antisimétrica, tal que $a_{13} = 1$ y $a_{21} = 0$. Consideramos la matriz $X \in \mathcal{M}_{3 \times 6}(\mathbb{R})$, tal que $X = (A|A^t)$, o sea X es la matriz que tiene a A como submatriz en las tres primeras columnas, y a A^t como submatriz en las últimas tres columnas.

Calcular el rango de X .

(15 puntos)



Puntajes (solo para uso del equipo docente)					
MO1	MO2	MO3	MO4	D1	D2

Solución del examen - Geometría y Álgebra Lineal 1

Lunes 6 de febrero de 2023

0000

No. de Examen

John Doe

Nombre y Apellido

0.000.000-0

Cédula de Identidad

JD

Firma

Respuestas			
MO1	MO2	MO3	MO4
B	F	F	A

MO 1. Sea $A \in \mathcal{M}_{8 \times 8}(\mathbb{R})$ la matriz dada por

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$



Entonces $|A|$ (el determinante de A) es igual a:

- (A) 2^7 (D) $(-1)^7$
 (B) -2^7 (E) 1
 (C) 0 (F) 8.

Solución: La opción correcta es la (b). Aplicamos la operación elemental $F_i - F_1 \rightarrow F_i$ con $2 \leq i \leq 8$. Así, por propiedades del determinante, se tiene:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 \end{vmatrix} = (-2)^7 = -2^7.$$

MO 2. Sea S_λ el sistema de ecuaciones lineales dado por

$$\begin{cases} \lambda x + y + z = 0 \\ y + z = 4 \\ x + y + \lambda z = 1 \end{cases}$$

donde λ es un parámetro real ($\lambda \in \mathbb{R}$).

Entonces:

- (A) S_1 es compatible determinado. (D) S_{-1} es incompatible.
 (B) S_λ es compatible determinado si y solo si $\lambda \neq 1$. (E) S_0 tiene infinitas soluciones.
 (C) S_2 es compatible determinado y la suma de las coordenadas de su solución es 6. (F) No existe λ tal que S_λ sea compatible indeterminado.

3/6

Solución: La opción correcta es la (F). Primero, calculamos el determinante de la matriz asociada de S_λ (usando propiedades del determinante):

$$\begin{vmatrix} \lambda & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & \lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & \lambda \end{vmatrix} = \lambda \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & \lambda \end{vmatrix} = \lambda(\lambda - 1).$$

Para $\lambda \neq 0, 1$, tenemos que el determinante de la matriz asociada de S_λ es diferente de cero, por lo cual dicha matriz es invertible. En este caso, tenemos que el sistema es compatible determinado (es decir, tiene solución única).

Ahora analicemos los casos $\lambda = 0$ y $\lambda = 1$:

- Para $\lambda = 0$: De la primera y segunda ecuación de S_0 , tenemos que $0 = y + z = 4$, lo cual es una contradicción. Luego, S_0 es incompatible.
- Para $\lambda = 1$: De la primera y tercera ecuación de S_1 , tenemos que $0 = x + y + z = 1$, lo cual es una contradicción. Luego, S_1 es incompatible.

MO 3. Dado $a \in \mathbb{R}$, considere r y s las rectas de $\mathbb{R}^3$ cuyas ecuaciones paramétricas están dadas por

$$r: \begin{cases} x = 0 \\ y = 4 - a\lambda \\ z = 2 + \lambda \end{cases} \quad y \quad s: \begin{cases} x = 1 \\ y = 4 + \lambda' \\ z = 2 + a\lambda' \end{cases} \quad \text{con } \lambda, \lambda' \in \mathbb{R}.$$

Entonces:

- | | |
|--|--|
| (A) Para todo $a \in \mathbb{R}$, hay solamente un punto en r con norma igual a 5. | (D) Existen valores de $a \in \mathbb{R}$ tales que la distancia entre r y s es estrictamente mayor que 1. |
| (B) Los vectores directores de r y s forman un ángulo de $\pi/6$ radianes (30 grados sexagesimales). | (E) r , para todo $a \in \mathbb{R}$, no tiene puntos de norma menor a 5. |
| (C) Existe $a \in \mathbb{R}$ tal que ambas rectas están contenidas en el mismo plano. | (F) Existen infinitos valores de $a \in \mathbb{R}$ tales que la distancia entre r y s es 1. |

Solución: La opción correcta es la (F). Por un lado, los vectores de dirección de r y s son $(0, -a, 1)$ y $(0, 1, a)$. Tomando el producto escalar entre ellos, tenemos que

$$\langle (0, -a, 1), (0, 1, a) \rangle = 0 - a + a = 0.$$

Luego, como el producto escalar es cero, los vectores dirección de ambas rectas son ortogonales. O sea que las direcciones de r y s son ortogonales para todo $a \in \mathbb{R}$.

Por otro lado, r está contenida en el plano $x = 0$, y s en el plano $x = 1$, que son planos paralelos. Por lo tanto, la distancia entre r y s siempre es 1 (para todo $a \in \mathbb{R}$). Nótese que este argumento también implica que (B), (C) y (D) son falsas.

Pasamos a analizar las opciones (A) y (E). Para $a = 0$, en la recta r : $\begin{cases} x = 0 \\ y = 4 \\ z = 2 + \lambda \end{cases}$:

- el punto r_{-2} tiene norma igual a 4, lo cual muestra que (E) es falsa;
- los puntos r_1 y r_{-5} tienen norma igual a 5, lo cual muestra que (A) es falsa.

MO 4. Sea $V := \{A \in \mathcal{M}_{3 \times 3}(\mathbb{R}) \mid A = A^t \text{ y } \text{tr}(A) = 0\}$. Se consideran los conjuntos $L \subseteq G \subset V$:

$$L := \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \right\} \text{ y}$$

$$G := L \cup \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Entonces:

- | | |
|---|---|
| (A) Existe una única base B de V tal que $L \subseteq B \subseteq G$. | (D) Si $B \subseteq G$, entonces B no es base de V . |
| (B) Existen bases B de V tales que $B \subseteq G$ pero ninguna contiene a L . | (E) Existen al menos dos bases B_1 y B_2 de V tal que $L \subseteq B_1 \subseteq G$ y $L \subseteq B_2 \subseteq G$. |
| (C) Existen bases B de V tales que $L \subseteq B$ pero ninguna está contenida en G . | (F) Si $L \subseteq B$, entonces B no es base de V . |

Solución: La respuesta correcta es (A). Lo primero que notamos es que V es un subespacio vectorial de $M_{3 \times 3}(\mathbb{R})$ de dimensión 5. En efecto, los elementos de $A \in V$ son de la forma

$$A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ b & d & e \\ c & e & -a-d \end{pmatrix} =$$

$$= a \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} + d \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} + e \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

y además

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

es LI.

Llamemos L_1, L_2 y L_3 a las matrices del conjunto L , en el orden en el que aparecen en el enunciado. Notamos que L es LI. En efecto, observemos primero que $\{L_1, L_2\}$ es LI. Al agregar L_3 , tenemos que L_3 no es combinación lineal de $\{L_1, L_2\}$. De lo contrario, si $L_3 = \alpha L_1 + \beta L_2$ para algunos $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, se tendría que $\beta = 0$ (entrada (1, 2)). Luego, $L_3 = \alpha L_1$, de donde $-2\alpha = 0$ (entrada (2, 2)). Así, $\alpha = \beta = 0$ y $L_3 = 0$, lo cual es una contradicción.

Sabiendo que L es LI, consideremos el conjunto G , y llamemos G_4, G_5 y G_6 a las matrices de G que no están en L , en el orden en el que aparecen en el enunciado. Nótese que $G_5 = -L_1 + L_2$, por lo cual G no es LI. Descartamos entonces G_5 . Por otro lado, $L \cup \{G_6\}$ es LI, ya que $G_6 \notin [L]$ (subespacio generado por L). En efecto, la entrada (3, 1) de G_6 no se puede obtener como combinación lineal de L . Finalmente, consideremos G_4 . Tenemos que $G_4 \notin [L \cup \{G_6\}]$, ya que la entrada (3, 2) no se puede obtener como combinación lineal de $L \cup \{G_6\}$. Por lo tanto, $G - \{G_5\}$ es LI. Como $\dim(V) = 5$, tenemos entonces que $L \cup \{G_4, G_6\}$ es base de V , y además, por el análisis hecho, es la única que contiene a L y que está contenida en G . Note que el análisis anterior descarta el resto de las opciones.

D 1. Se consideran los siguientes conjuntos de los respectivos espacios vectoriales con las operaciones habituales:

- $S_1 = \{p \in \mathbb{R}_7[x] : p(x) + p(-x) = 0\} \subseteq \mathbb{R}_7[x],$
- $S_2 = \{A \in M_{n \times n}(\mathbb{R}) : \det(A) \leq 0\} \subseteq M_{n \times n}(\mathbb{R}),$
- $S_3 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 - y^2 = 0\} \subseteq \mathbb{R}^3.$

a) Considerando S_1, S_2 y S_3 , y las inclusiones definidas arriba, decir cuáles son subespacios vectoriales y cuáles no.

Solución: S_1 es subespacio de $\mathbb{R}_7[x]$, mientras que S_2 no es subespacio de $M_{n \times n}(\mathbb{R})$, y S_3 no es subespacio de $\mathbb{R}^3$.

b) 1) Para aquél o aquellos casos en que S_i sea subespacio vectorial, demostrarlo.

2) Hallar una base y determinar la dimensión del subespacio, en cada caso.

Solución: Sea $p(x) = a + bx + cx^2 + dx^3 + ex^4 + fx^5 + gx^6 + hx^7$ un elemento genérico de S_1 , con $a, b, c, d, e, f, g, h \in \mathbb{R}$. Como $p(x) = p(-x)$, y

$$p(-x) = a - bx + cx^2 - dx^3 + ex^4 - fx^5 + gx^6 - hx^7,$$

se tiene que

$$a + bx + cx^2 + dx^3 + ex^4 + fx^5 + gx^6 + hx^7 = a - bx + cx^2 - dx^3 + ex^4 - fx^5 + gx^6 - hx^7$$

$$bx + dx^3 + fx^5 + hx^7 = -bx - dx^3 - fx^5 - hx^7$$

$$2bx + 2dx^3 + 2fx^5 + 2hx^7 = 0$$

$$bx + dx^3 + fx^5 + hx^7 = 0.$$

Luego, como $\{x, x^3, x^5, x^7\}$ es un subconjunto LI de $\mathbb{R}_7[x]$, se tiene que $b = d = f = h = 0$. Por lo tanto,

$$p(x) = a + cx^2 + ex^4 + gx^6.$$

5/6



Vemos así que $S_1 = [1, x^2, x^4, x^6]$, y por lo tanto es un subespacio vectorial de $\mathbb{R}_7[x]$ (el conjunto de combinaciones lineales de un subconjunto de vectores de un espacio vectorial es un subespacio). Por otro lado, $\{1, x^2, x^4, x^6\}$ es LI, por lo cual es base de S_1 , y así S_1 es un subespacio vectorial de dimensión 4.

- c) En aquél o aquellos casos que S_i no sea subespacio mostrar, vía contraejemplo(s), porqué no es (son) subespacio(s).

Solución: Respecto a S_2 , para el caso $n = 2$, considere las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Tenemos que $A, B \in S_2$ (pues tienen determinante igual a cero). Sin embargo, $A + B = I$ (matriz identidad de tamaño 2), que no pertenece a S_2 (pues tiene determinante positivo). Por lo tanto, la suma de matrices no es cerrada en S_2 , por lo cual S_2 no es un subespacio de $M_{2 \times 2}(\mathbb{R})$.

Respecto a S_3 , note que los vectores $(1, 1, 0)$, $(1, -1, 0)$ están en S_3 . Sin embargo, $(1, 1, 0) + (1, -1, 0) = (2, 0, 0) \notin S_3$. Por lo tanto, la suma de 3-uplas no es cerrada en S_3 , por lo cual S_3 no es un subespacio de $\mathbb{R}^3$.

- D 2. Sea $A \in M_{3 \times 3}(\mathbb{R})$ una matriz antisimétrica, tal que $a_{13} = 1$ y $a_{21} = 0$. Consideramos la matriz $X \in M_{3 \times 6}(\mathbb{R})$, tal que $X = (A|A^t)$, o sea X es la matriz que tiene a A como submatriz en las tres primeras columnas, y a A^t como submatriz en las últimas tres columnas.

Calcular el rango de X .

Solución: Por ser A antisimétrica, con $a_{13} = 1$ y $a_{21} = 0$, tenemos que A y A^t son de la forma:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & a \\ -1 & -a & 0 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad A^t = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -a \\ 1 & a & 0 \end{pmatrix}$$

Luego, X es de la forma

$$X = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & a & 0 & 0 & -a \\ -1 & -a & 0 & 1 & a & 0 \end{array} \right).$$

Denotemos por X^i la fila i -ésima de X , con $1 \leq i \leq 3$. Tenemos que $X^2 = aX^1$. Por otro lado, $\{X^1, X^3\}$ es un subconjunto LI de $\mathbb{R}^6$. En efecto, si $\alpha X^1 + \beta X^3 = (0, 0, 0, 0, 0, 0)$, entonces

$$(0, 0, 0, 0, 0, 0) = \alpha (0, 0, 1, 0, 0, 0) + \beta (-1, -a, 0, 1, a, 0) = (-\beta, -a\beta, \alpha, \beta, a\beta, -\alpha).$$

Luego, $\alpha = \beta = 0$, y por ende $\{X^1, X^3\}$ es LI. Finalmente, como el rango de X es el máximo número de filas de X que forman un subconjunto LI de $\mathbb{R}^6$, se tiene que $\text{rango}(X) = 2$.

