

**Examen - Geometría y Álgebra Lineal 1****Jueves 12 de diciembre de 2024**

Número de prueba	APELLIDO, Nombre	Cédula de Identidad

Control	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1										

La duración del examen es de tres horas y media.

Cada respuesta correcta suma 10 puntos.

Cada respuesta incorrecta resta 1,5 puntos.

Recordar que $\mathbb{R}_n[x]$ es el espacio vectorial de polinomios de grado $\leq n$ con coeficientes en $\mathbb{R}$, $M_{m \times n}(\mathbb{R})$ es el espacio vectorial de matrices de tamaño $m \times n$ con coeficientes reales y I_n la matriz identidad de tamaño $n \times n$.

Ejercicio 1.

Sea $A = \begin{pmatrix} 1 & a & 2 \\ 2 & b & 4 \\ 3 & c & 6 \end{pmatrix} \in M_{3 \times 3}(\mathbb{R})$. Indicar la opción correcta:

- (A) Si $a = b = c$ entonces $\text{rango}(A) = 2$.
 (B) Si $a = 2b$, $c = 3b$ entonces $\text{rango}(A) = 1$.
 (C) Si $a = 0$, $b = c \neq 0$ entonces $\text{rango}(A) = 2$.
 (D) Si $b = 2a$, $c = 3a$ entonces $\text{rango}(A) = 2$.
 (E) $\text{rango}(A) = 3$ para todos $a, b, c \in \mathbb{R}$.

Ejercicio 2.

Sean la recta $r) (x, y, z) = (2, 1, 3) + \lambda(a, b, c)$ y el plano $\pi) ax + cy + bz = d$ con $a, b, c \in \mathbb{R}$. Si $r \parallel \pi$ entonces:

- (A) $2a + 2b + 2c = 0$.
 (B) $2a + b + 3c = 0$.
 (C) $a = b = c$.
 (D) $d = 0$.
 (E) $a^2 = -2bc$.

Ejercicio 3

Sean $r) (x, y, z) = (0, 1, 2) + \lambda(1, -1, 1)$ y $P = (-1, -1, 1)$. Entonces la distancia del punto P a la recta r es:

- (A) $d(P, r) = \sqrt{6}$.
 (B) $d(P, r) = \sqrt{\frac{22}{3}}$.
 (C) $d(P, r) = \sqrt{\frac{10}{3}}$.
 (D) $d(P, r) = \sqrt{\frac{22}{5}}$.
 (E) $d(P, r) = \sqrt{\frac{18}{5}}$.

Ejercicio 4.

Sean $U = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 : x - z = 0, y - t = 0\}$ y $V = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 : x - y = 0, z - t = 0\}$ subespacios de $\mathbb{R}^4$ y $W = U + V$. Indicar la opción correcta:

- (A) $W \neq U \oplus V$ y $\dim(W) = 2$. (C) $W = U \oplus V$ y $\dim(W) = 4$. (E) $W = U \oplus V$ y $\dim(W) = 2$.
(B) $W = U \oplus V$ y $\dim(W) = 3$. (D) $W \neq U \oplus V$ y $\dim(W) = 3$.

Ejercicio 5.

Sea V un $\mathbb{R}$ -espacio vectorial de dimensión 3 y $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, v_3\}$ una base de V . Se definen los siguientes subconjunto de V

$$\mathcal{A} = \{v_1 - v_3, v_1, v_1 + v_2, v_3\}, \quad \mathcal{C} = \{2v_2, v_1 - v_2\}, \quad \mathcal{D} = \{v_1 + v_2, v_1 - v_3, v_2 - v_3\}.$$

Indicar la opción correcta:

- (A) $\mathcal{A}$ y $\mathcal{C}$ son LD y $\mathcal{D}$ es LI. (C) $\mathcal{A}$ y $\mathcal{D}$ son LI y $\mathcal{C}$ es base. (E) $\mathcal{C}$ es LI y $\mathcal{A}$ y $\mathcal{D}$ son LD.
(B) $\mathcal{A}$ es LD, $\mathcal{D}$ es base y $\mathcal{C}$ es LI. (D) $\mathcal{C}$ y $\mathcal{D}$ son LD y $\mathcal{A}$ es LI.

Ejercicio 6.

Sea $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ transformación lineal tal que $N(T) = \{(x, y, z) : 2x + y - z = 0, y - z = 0\}$, $T(1, 1, 0) = (2, -1)$ y $T(0, 0, 1) = (1, 1)$. Indicar la opción correcta:

- (A) $T(1, -1, 0) = (4, 1)$. (C) $T(1, -1, 0) = (0, -2)$. (E) $T(1, -1, 0) = (2, -1)$.
(B) $T(1, -1, 0) = (3, 0)$. (D) $T(1, -1, 0) = (0, 2)$.

Ejercicio 7.

Sea $T : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^3$ transformación lineal cuya matriz asociada en las bases canónicas es

$$\begin{pmatrix} 1+a & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1+a & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1+a \end{pmatrix}$$

donde $a \in \mathbb{R}$. Indicar la opción correcta:

- (A) No existen valores de a para los cuales $\dim N(T) = 1$.
(B) Existe un único valor de a para el cual $\dim N(T) = 1$.
(C) Para todo $a \in \mathbb{R}$ se tiene que $\dim N(T) = 1$.
(D) Existen infinitos valores de a para los cuales $\dim N(T) = 1$.
(E) Existen exactamente dos valores de a para los cuales $\dim N(T) = 1$.

Ejercicio 8.

Sean V un $\mathbb{R}$ -espacio vectorial de dimensión finita $n \geq 1$, $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ bases distintas de V . Si $T : V \rightarrow V$ es un isomorfismo indicar la opción correcta:

- (A) $B(T^{-1} \circ T)_B = I_n$ y $B(T \circ T)_A = B(T)_{BB}(T)_A$. (D) $A(T^{-1} \circ T)_B = I_n$ y $A(T \circ T)_B = B(T)_{AA}(T)_A$.
 (B) $B(T^{-1} \circ T)_A = I_n$ y $B(T \circ T)_A = B(T)_{BB}(T)_A$.
 (C) $A(T^{-1} \circ T)_A = I_n$ y $B(T \circ T)_A = B(T)_{AB}(T)_A$. (E) $A(T^{-1} \circ T)_B = I_n$ y $A(T \circ T)_B = A(T)_{AA}(T)_B$.

Ejercicio 9.

Sean $\mathcal{A} = \{1, 1+x\}$ y $\mathcal{C} = \{1, x\}$ bases de $\mathbb{R}_1[x]$ y $T: \mathbb{R}_1[x] \rightarrow \mathbb{R}_1[x]$ transformación lineal definida por

$$T(p(x)) = p(0) + p(1)x$$

Si $T^{-1}: \mathbb{R}_1[x] \rightarrow \mathbb{R}_1[x]$ es la inversa de T y $A(T^{-1})_{\mathcal{C}}$ es la matriz asociada a T^{-1} de la base $\mathcal{C}$ a la base $\mathcal{A}$. Indicar la opción correcta:

- (A) $A(T^{-1})_{\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$. (C) $A(T^{-1})_{\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. (E) $A(T^{-1})_{\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.
 (B) $A(T^{-1})_{\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$. (D) $A(T^{-1})_{\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

Ejercicio 10.

Sean $\mathcal{A} = \{(1, 2), (1, -3)\}$ y $\mathcal{B} = \{u_1, u_2\}$ bases de $\mathbb{R}^2$, tales que la matriz cambio de base de la base $\mathcal{A}$ a la base $\mathcal{B}$ es

$$B(Id)_{\mathcal{A}} = \begin{pmatrix} a & 3 \\ -2 & b \end{pmatrix}, a, b \in \mathbb{R}.$$

Si $u = (2, -1)$ tiene por coordenadas respecto a la base $\mathcal{B}$ el vector $\text{coord}_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Entonces, los valores de a y b son:

- (A) $a = -3, b = 2$. (C) $a = -1, b = 0$. (E) $a = -2, b = 3$.
 (B) $a = 2, b = 1$. (D) $a = 0, b = 1$.

Solución examen diciembre 2024

Geometría y Álgebra Lineal 1

Ejercicio 1.

Sea $A = \begin{pmatrix} 1 & a & 2 \\ 2 & b & 4 \\ 3 & c & 6 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3 \times 3}(\mathbb{R})$. Indicar la opción correcta:

(A) Si $a = b = c$ entonces $\text{rango}(A) = 2$. **FALSO:** Si $a = b = c = 0$ entonces $\text{rango}(A) = 1$.

(B) Si $a = 2b$, $c = 3b$ entonces $\text{rango}(A) = 1$. **FALSO:** Si tomamos $b = 1$ entonces

$$\text{rg}(A) = \text{rg} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 4 \\ 3 & 3 & 6 \end{pmatrix} = \text{rg} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \end{pmatrix} = \text{rg} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 2.$$

(C) Si $a = 0$, $b = c \neq 0$ entonces $\text{rango}(A) = 2$. **VERDADERO:**

$$\text{rg}(A) = \text{rg} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & b & 4 \\ 3 & b & 6 \end{pmatrix} = \text{rg} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 4 \\ 3 & 1 & 6 \end{pmatrix} = \text{rg} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = 2.$$

(D) Si $b = 2a$, $c = 3a$ entonces $\text{rango}(A) = 2$. **FALSO:** Si $a \neq 0$:

$$\text{rg}(A) = \text{rg} \begin{pmatrix} 1 & a & 2 \\ 2 & 2a & 4 \\ 3 & 3a & 6 \end{pmatrix} = \text{rg} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix} = 1$$

$$\text{Si } a = 0: \text{rg}(A) = \text{rg} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 4 \\ 3 & 0 & 6 \end{pmatrix} = \text{rg} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \\ 3 & 0 & 3 \end{pmatrix} = 1.$$

(E) $\text{rango}(A) = 3$ para todos $a, b, c \in \mathbb{R}$. **FALSO.**

Ejercicio 2.

Sean la recta $r) (x, y, z) = (2, 1, 3) + \lambda(a, b, c)$ y el plano $\pi) ax + cy + bz = d$ con $a, b, c \in \mathbb{R}$. Si $r \parallel \pi$ entonces:

(A) $2a + 2b + 2c = 0$.

(C) $a = b = c$.

(E) $a^2 = -2bc$.

(B) $2a + b + 3c = 0$.

(D) $d = 0$.

Solución: Observar que $r \parallel \pi \Leftrightarrow$ la dirección normal n a π y la dirección u de r son ortogonales $\Leftrightarrow \langle n, u \rangle = 0$.

En este caso $n = (a, c, b)$ y $u = (a, b, c)$. Entonces

$$0 = \langle n, u \rangle = \langle (a, c, b), (a, b, c) \rangle = a^2 + cb + bc = a^2 + 2bc \Rightarrow a^2 = -2bc. \quad (\text{E})$$

Ejercicio 3

Sean $r) (x, y, z) = (0, 1, 2) + \lambda(1, -1, 1)$ y $P = (-1, -1, 1)$. Entonces la distancia del punto P a la recta r es:

- (A) $d(P, r) = \sqrt{6}$. (C) $d(P, r) = \sqrt{\frac{10}{3}}$. (E) $d(P, r) = \sqrt{\frac{18}{5}}$.
 (B) $d(P, r) = \sqrt{\frac{22}{3}}$. (D) $d(P, r) = \sqrt{\frac{22}{5}}$.

Solución: Sea $A = (0, 1, 2)$ y $v = (1, -1, 1)$. Entonces

$$d(P, r) = \frac{\|AP \times v\|}{\|v\|} = \frac{3\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = \sqrt{6}, \quad (\text{A})$$

donde $\|v\| = \sqrt{3}$ y $AP = (-1, -2, -1)$ entonces $AP \times v = (-3, 0, 3)$ y $\|(-3, 0, 3)\| = 3\sqrt{2}$.

Ejercicio 4.

Sean $U = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 : x - z = 0, y - t = 0\}$ y $V = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 : x - y = 0, z - t = 0\}$ subespacios de $\mathbb{R}^4$ y $W = U + V$. Indicar la opción correcta:

- (A) $W \neq U \oplus V$ y $\dim(W) = 2$. (C) $W = U \oplus V$ y $\dim(W) = 4$. (E) $W = U \oplus V$ y $\dim(W) = 2$.
 (B) $W = U \oplus V$ y $\dim(W) = 3$. (D) $W \neq U \oplus V$ y $\dim(W) = 3$.

Solución:

$$U = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 : x - z = 0, y - t = 0\} = \{(x, y, x, y) : x, y \in \mathbb{R}\} = [(1, 0, 1, 0), (0, 1, 0, 1)]$$

$$V = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 : x - y = 0, z - t = 0\} = \{(x, x, z, z) : x, z \in \mathbb{R}\} = [(1, 1, 0, 0), (0, 0, 1, 1)]$$

$$(x, y, z, t) \in U \cap V \Leftrightarrow x = z, y = t, x = y, z = t \Leftrightarrow x = y = z = t.$$

$$\Rightarrow U \cap V = \{(x, x, x, x) : x \in \mathbb{R}\} = [(1, 1, 1, 1)]$$

$$\Rightarrow W = U + V \neq U \oplus V,$$

$$\dim(W) = \dim(U) + \dim(V) - \dim(U \cap V) = 2 + 2 - 1 = 3. \quad (\text{D})$$

Ejercicio 5.

Sea V un $\mathbb{R}$ -espacio vectorial de dimensión 3 y $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, v_3\}$ una base de V . Se definen los siguientes subconjuntos de V

$$\mathcal{A} = \{v_1 - v_3, v_1, v_1 + v_2, v_3\}, \quad \mathcal{C} = \{2v_2, v_1 - v_2\}, \quad \mathcal{D} = \{v_1 + v_2, v_1 - v_3, v_2 - v_3\}.$$

Indicar la opción correcta:

(A) $\mathcal{A}$ y $\mathcal{C}$ son LD y $\mathcal{D}$ es LI.

(D) $\mathcal{C}$ y $\mathcal{D}$ son LD y $\mathcal{A}$ es LI.

(B) $\mathcal{A}$ es LD, $\mathcal{D}$ es base y $\mathcal{C}$ es LI.

(C) $\mathcal{A}$ y $\mathcal{D}$ son LI y $\mathcal{C}$ es base.

(E) $\mathcal{C}$ es LI y $\mathcal{A}$ y $\mathcal{D}$ son LD.

Solución: $\#\mathcal{A} = 4 > \dim(V) = 3 \Rightarrow \mathcal{A}$ es LD.

$\mathcal{C}$ es LI: $2av_2 + b(v_1 - v_2) = 0 \Rightarrow bv_1 + (2a - b)v_2 = 0 \Rightarrow b = 0, 2a - b = 0 \Rightarrow a = b = 0$.

$\#\mathcal{D} = 3 = \dim(V)$, para ver que es base alcanza probar que es LI:

$$a(v_1 + v_2) + b(v_1 - v_3) + c(v_2 - v_3) = (a + b)v_1 + (a + c)v_2 - (b + c)v_3 = 0$$

Usando que $\mathcal{B}$ es base de V concluimos que $a + b = 0, a + c = 0, b + c = 0 \Rightarrow a = b = c = 0$. Entonces $\mathcal{D}$ es base de V . (B).

Ejercicio 6.

Sea $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ transformación lineal tal que $N(T) = \{(x, y, z) : 2x + y - z = 0, y - z = 0\}$, $T(1, 1, 0) = (2, -1)$ y $T(0, 0, 1) = (1, 1)$. Indicar la opción correcta:

(A) $T(1, -1, 0) = (4, 1)$.

(C) $T(1, -1, 0) = (0, -2)$.

(E) $T(1, -1, 0) = (2, -1)$.

(B) $T(1, -1, 0) = (3, 0)$.

(D) $T(1, -1, 0) = (0, 2)$.

Solución:

$$(x, y, z) \in N(T) \Rightarrow y = z, 2x + y - z = 0 \Rightarrow y = z, x = 0$$

$$\Rightarrow N(T) = [(0, z, z) : z \in \mathbb{R}] = [(0, 1, 1)].$$

Por otro lado,

$$(1, -1, 0) = -2(0, 1, 1) + (1, 1, 0) + 2(0, 0, 1)$$

$$\Rightarrow T(1, -1, 0) = -2T(0, 1, 1) + T(1, 1, 0) + 2T(0, 0, 1) = (0, 0) + (2, -1) + 2(1, 1) = (4, 1). \text{ (A)}$$

Ejercicio 7.

Sea $T : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^3$ transformación lineal cuya matriz asociada en las bases canónicas es

$$\begin{pmatrix} 1+a & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1+a & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1+a \end{pmatrix}$$

donde $a \in \mathbb{R}$. Indicar la opción correcta:

(A) No existen valores de a para los cuales $\dim N(T) = 1$.

(B) Existe un único valor de a para el cual $\dim N(T) = 1$.

(C) Para todo $a \in \mathbb{R}$ se tiene que $\dim N(T) = 1$.

(D) Existen infinitos valores de a para los cuales $\dim N(T) = 1$.

(E) Existen exactamente dos valores de a para los cuales $\dim N(T) = 1$.

Solución:

$$\begin{pmatrix} 1+a & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1+a & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1+a \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1+a \\ 1 & 0 & 1+a & 1 \\ 1+a & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1+a \\ 0 & 0 & a & -a \\ 0 & 0 & -a & 1-(1+a)^2 \end{pmatrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1+a \\ 0 & 0 & a & -a \\ 0 & 0 & 0 & -a(a+3) \end{pmatrix}$$

Si $a = 0 \Rightarrow \text{rg}(c(T)_c) = 1 \Rightarrow \dim(N(T)) = 3$.

Si $a \neq 0 \Rightarrow$ tenemos dos posibilidades:

$a = -3 \Rightarrow \text{rg}(c(T)_c) = 2 \Rightarrow \dim(N(T)) = 2$ y

$a \neq -3 \Rightarrow \text{rg}(c(T)_c) = 3 \Rightarrow \dim(N(T)) = 1$.

Entonces existen infinitos valores de a para los cuales $\dim N(T) = 1$. (D).

Ejercicio 8.

Sean V un $\mathbb{R}$ -espacio vectorial de dimensión finita $n \geq 1$, $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ bases distintas de V . Si $T : V \rightarrow V$ es un isomorfismo indicar la opción correcta:

(A) ${}_B(T^{-1} \circ T)_B = I_n$ y ${}_B(T \circ T)_A = {}_B(T) {}_B B(T)_A$.

(B) ${}_B(T^{-1} \circ T)_A = I_n$ y ${}_B(T \circ T)_A = {}_B(T) {}_B B(T)_A$.

(C) ${}_A(T^{-1} \circ T)_A = I_n$ y ${}_B(T \circ T)_A = {}_B(T) {}_A B(T)_A$.

(D) ${}_A(T^{-1} \circ T)_B = I_n$ y ${}_A(T \circ T)_B = {}_B(T) {}_A A(T)_A$.

(E) ${}_A(T^{-1} \circ T)_B = I_n$ y ${}_A(T \circ T)_B = {}_A(T) {}_A A(T)_B$.

Solución: Por propiedades de las matrices asociadas vistas en teórico tenemos que la opción correcta es: ${}_B(T^{-1} \circ T)_B = I_n$ y ${}_B(T \circ T)_A = {}_B(T) {}_B B(T)_A$. (A).

Ejercicio 9.

Sean $\mathcal{A} = \{1, 1+x\}$ y $\mathcal{C} = \{1, x\}$ bases de $\mathbb{R}_1[x]$ y $T : \mathbb{R}_1[x] \rightarrow \mathbb{R}_1[x]$ transformación lineal definida por

$$T(p(x)) = p(0) + p(1)x$$

Si $T^{-1} : \mathbb{R}_1[x] \rightarrow \mathbb{R}_1[x]$ es la inversa de T y ${}_A(T^{-1})_C$ es la matriz asociada a T^{-1} de la base $\mathcal{C}$ a la base $\mathcal{A}$. Indicar la opción correcta:

(A) ${}_A(T^{-1})_C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$, (C) ${}_A(T^{-1})_C = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, (E) ${}_A(T^{-1})_C = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

(B) ${}_A(T^{-1})_C = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$, (D) ${}_A(T^{-1})_C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

Solución: ${}_A(T^{-1})_C = [{}_C(T)_A]^{-1}$.
 $T(1) = 1 + 1 \Rightarrow \text{coord}_C(T(1)) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ y $T(1+x) = 1 + 2x \Rightarrow \text{coord}_C(T(1+x)) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow {}_C(T)_A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{array} \right) \Rightarrow {}_A(T^{-1})_C = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \text{ (B).}$$

Ejercicio 10.

Sean $\mathcal{A} = \{(1, 2), (1, -3)\}$ y $\mathcal{B} = \{u_1, u_2\}$ bases de $\mathbb{R}^2$, tales que la matriz cambio de base de la base $\mathcal{A}$ a la base $\mathcal{B}$ es

$${}_B(Id)_A = \begin{pmatrix} a & 3 \\ -2 & b \end{pmatrix}, \quad a, b \in \mathbb{R}.$$

Si $u = (2, -1)$ tiene por coordenadas respecto a la base $\mathcal{B}$ el vector $\text{coord}_B(u) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Entonces, los valores de a y b son:

(A) $a = -3, b = 2$.

(C) $a = -1, b = 0$.

(E) $a = -2, b = 3$.

(B) $a = 2, b = 1$.

(D) $a = 0, b = 1$.

Solución: Por propiedad de matriz cambio de base tenemos que: $\text{coord}_B(u) = {}_B(Id)_A \text{coord}_A(u)$.
 $(2, -1) = (1, 2) + (1, -3) \Rightarrow \text{coord}_A(u) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

$$\Rightarrow \text{coord}_B(u) = \begin{pmatrix} a & 3 \\ -2 & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+3 \\ -2+b \end{pmatrix}.$$

Como $\text{coord}_B(u) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ se debe de cumplir que $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+3 \\ -2+b \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} a = -3 \\ b = 2 \end{cases} \quad \text{(A)}.$

8/8