

**Examen - Geometría y Álgebra Lineal 1****Jueves 16 de julio de 2026**

Número de lista	APELLIDO, Nombre	Cédula de Identidad

Versión	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1										

La duración del examen es de tres horas y media. En cada ejercicio hay una sola opción correcta. El examen se aprueba con más de 58 puntos. Cada respuesta correcta suma 10 puntos. Cada respuesta incorrecta resta 1,5 puntos. Se debe entregar la hoja de escáner y las hojas de la propuesta con todos los campos completos.

Notación:

- $\mathbb{R}_n[x]$ es el espacio vectorial de polinomios de grado $\leq n$ con coeficientes en $\mathbb{R}$.
- $\mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{K})$ es el espacio vectorial de matrices de tamaño $m \times n$ con coeficientes en $\mathbb{K}$.
- En este examen todo espacio vectorial es de dimensión finita mayor o igual a 1.
- $\oplus$ representa la suma directa de subespacios.
- $N(T)$ es el núcleo de la transformación lineal T .

**Ejercicio 1.**

Se considera el sistema de ecuaciones lineales dependiente del parámetro $a \in \mathbb{R}$:

$$(S_a) : \begin{cases} ax + y + z = 1 \\ x + ay + z = a \\ x + y + az = a^2 \end{cases}$$

Indicar la opción correcta:

- (A) El sistema es incompatible para exactamente tres valores de a .
- (B) El sistema es compatible indeterminado para exactamente dos valores de a .
- (C) Si $a = 1$, el sistema es compatible determinado.
- (D) El sistema es incompatible para un único valor de a .
- (E) Para $a = 0$ el sistema es incompatible.

Ejercicio 2.

Sean $A, B \in M_{3 \times 3}(\mathbb{R})$ matrices invertibles. Se sabe que $\det(A) = \frac{1}{2}$ y $\det(B) = 4$.
 ¿Cuál es el valor del determinante de la matriz $M = 2A^t B^{-1} A$?

- (A) $\frac{1}{8}$ (B) $\frac{1}{4}$ (C) $\frac{1}{2}$ (D) 1 (E) 2

Ejercicio 3.

Sea V un $\mathbb{R}$ -espacio vectorial, $\dim(V) = 4$. Consideremos $S = \{v_1, v_2, v_3\} \subset V$ conjunto **linealmente independiente**. Se construye un nuevo conjunto $S^* = \{v_1, v_2, v_3, w_1, w_2\} \subset V$, donde w_1 y w_2 son dos vectores cualesquiera de V .

Indicar cuál de las siguientes afirmaciones es la correcta:

- (A) Si w_1 y w_2 son linealmente independientes entre sí, entonces S^* es necesariamente un conjunto generador de V .
 (B) El conjunto S^* siempre es un conjunto generador de V , independientemente de la elección de los vectores w_1 y w_2 .
 (C) Es imposible elegir w_1 y w_2 de tal manera que a partir de los elementos de S^* se pueda extraer una base de V .
 (D) Si $w_1 \in \langle v_1, v_2 \rangle$ y $w_2 \notin \langle v_1, v_2, v_3 \rangle$, entonces el subespacio generado por S^* tiene dimensión exactamente igual a 5.
 (E) Si S^* es un conjunto generador de V , entonces existe al menos un vector en S^* que puede expresarse como combinación lineal de los demás, y al eliminarlo, el conjunto resultante sigue generando a V .

Ejercicio 4.

En $\mathbb{R}^3$, se considera el plano $\pi : x + y - 2z = 5$ y la recta r dada por sus ecuaciones paramétricas:

$$r : \begin{cases} x = 1 + t \\ y = t \\ z = 1 + t \end{cases}$$

La distancia de la recta r al plano π es:

- (A) $\sqrt{2}$ (B) $2\sqrt{3}$ (C) $\sqrt{6}$ (D) $\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}}$ (E) 2

Ejercicio 5.

En $\mathbb{R}^3$, se considera el plano π que contiene a la recta $r : \begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = 2\lambda \\ z = 2 - \lambda \end{cases}$ y es perpendicular al plano

$\pi_1 : x - y + 2z = 5$. Entonces, la ecuación reducida del plano π es:

- (A) $x - y + 2z = 5$ (C) $2x - y + z = 4$ (E) $x + y + z = 3$
 (B) $x + 2y - z = -1$ (D) $3x - 3y - 3z = -3$

Ejercicio 6.

Sea V un espacio vectorial de dimensión 4 y $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ una base de V . Se considera el subespacio $S \subset V$ generado por el conjunto de vectores $A = \{u_1, u_2, u_3, u_4\}$, donde:

$$\blacksquare u_1 = v_1 + v_2$$

$$\blacksquare u_3 = v_3 + v_4$$

$$\blacksquare u_2 = v_2 + v_3$$

$$\blacksquare u_4 = v_1 + kv_4 \quad (\text{con } k \in \mathbb{R})$$

Indicar la opción correcta:

- (A) $\dim(S) = 4$ para todo $k \in \mathbb{R}$.
- (B) Existe un único valor de k para el cual A es una base de V .
- (C) Existe un único valor de k para el cual $\dim(S) = 3$ y para cualquier otro valor de k , $\dim(S) = 4$.
- (D) Existen exactamente dos valores de k para los cuales $\dim(S) = 3$ y para cualquier otro valor de k , $\dim(S) = 4$.
- (E) El conjunto A es linealmente dependiente para todo $k \in \mathbb{R}$.

Ejercicio 7.

Sea $A_a = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ a & a & 1 \\ 0 & 1 & a \end{pmatrix} \in M_{3 \times 3}(\mathbb{C})$, donde $a \in \mathbb{C}$.

Indicar cuál de las siguientes afirmaciones es correcta:

- (A) Existen exactamente dos valores de a para los cuales el rango es 2.
- (B) El rango es 3 para todo valor de a .
- (C) Existe exactamente un valor de a donde el rango es 1 y uno donde el rango es 2.
- (D) El rango es 2 para todo valor de a .
- (E) El rango es 3 únicamente para 3 valores distintos de a .

Ejercicio 8.

Se considera el espacio vectorial $\mathbb{R}_4[x]$ y los siguientes subespacios:

- $\blacksquare W_1 = \{p(x) \in \mathbb{R}_4[x] : p(x) \text{ es divisible por } (x^2 - 1)\},$
- $\blacksquare W_2 = \{p(x) \in \mathbb{R}_4[x] : p(x) = -p(-x) \text{ y } p(2) = 0\}.$

Indicar la opción correcta:

- (A) $W_1 \oplus W_2 = \mathbb{R}_4[x]$.
- (B) $W_1 + W_2 = \mathbb{R}_4[x]$, además la suma NO es directa y $\dim(W_1 \cap W_2) = 1$.
- (C) $W_1 \oplus W_2 \neq \mathbb{R}_4[x]$.
- (D) $W_1 + W_2 \neq \mathbb{R}_4[x]$, además la suma NO es directa y $\dim(W_1 \cap W_2) = 1$.
- (E) $W_1 + W_2 \neq \mathbb{R}_4[x]$ y además la suma NO es directa y $\dim(W_1 \cap W_2) = 2$.



Ejercicio 9.

Nos interesan las transformaciones lineales $T : \mathcal{M}_{2 \times 2}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}^3$ que verifican las siguientes cuatro condiciones:

$$\blacksquare T \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} = (1, 2, 3).$$

$$\blacksquare T \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} = (0, 1, -2)$$

$$\blacksquare T \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = (2, -1, 0).$$

$$\blacksquare T \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 3 & 3 \end{pmatrix} = (3, 2, 1).$$

Indicar la opción correcta:

- (A) No existe ninguna transformación lineal T que verifique las cuatro condiciones.
- (B) Existe una única transformación lineal T que verifica las cuatro condiciones, y ésta además verifica $T \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} = (1, -2, 5).$
- (C) Existen infinitas transformaciones lineales T que verifiquen las cuatro condiciones, y además, todas verifican $T \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} = (1, -2, 5).$
- (D) Existe una única transformación lineal T que verifica las cuatro condiciones, y ésta además verifica $T \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = (1, 1, 0).$
- (E) Existen infinitas transformaciones lineales T que verifiquen las cuatro condiciones, y una única que además verifica $T \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = (1, 1, 0).$

Ejercicio 10.

Sean V, W y U espacios vectoriales sobre un mismo cuerpo, con $\dim(V) = 5$ y $\dim(W) = 3$.

Consideremos dos transformaciones lineales $T : V \rightarrow W$ y $S : W \rightarrow U$.

Sabiendo que $\dim(\text{Im}(T)) = 3$ y que la composición $S \circ T : V \rightarrow U$ es la transformación lineal nula (Recordar que la compuesta se define como $S \circ T(v) = S(T(v))$).

Indicar cuál de las siguientes afirmaciones es correcta:

- (A) T es un isomorfismo y $\dim(N(S)) = 0$.
- (B) $\dim(N(T)) = 2$, la transformación T es inyectiva y $\dim(\text{Im}(S)) \geq 1$.
- (C) $\dim(N(T)) = 2$, la transformación T es sobreyectiva y S es la transformación nula.
- (D) $\dim(N(T)) = 2$ y se cumple que $\text{Im}(T)$ está contenida y no es igual a $N(S)$.
- (E) La transformación T es sobreyectiva y se cumple que $\dim(N(S)) = 2$.



4/12

Solución Examen - Geometría y Álgebra Lineal 1

Facultad de Ingeniería - UdelaR

16 de julio de 2026

Ejercicio 1

Se considera el sistema de ecuaciones lineales dependiente del parámetro $a \in \mathbb{R}$:

$$(S_a) : \begin{cases} ax + y + z = 1 \\ x + ay + z = a \\ x + y + az = a^2 \end{cases}$$



Indicar la opción correcta:

- (A) El sistema es incompatible para exactamente tres valores de a .
- (B) El sistema es compatible indeterminado para exactamente dos valores de a .
- (C) Si $a = 1$, el sistema es compatible determinado.
- (D) El sistema es incompatible si y solo si $a = -2$.
- (E) Para $a = 0$ el sistema es incompatible.

Solución: Calculamos el determinante de la matriz del sistema A :

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{vmatrix} = a(a^2 - 1) - 1(a - 1) + 1(1 - a) = (a - 1)^2(a + 2)$$

El determinante es cero para $a = 1$ y $a = -2$.

- Si $a = 1$: Todas las ecuaciones son $x + y + z = 1$, por lo que es un Sistema Compatible Indeterminado (SCI).
- Si $a = -2$: Sumando las tres ecuaciones obtenemos $0 = (-2)^2 - 2 + 1 = 3$, una contradicción. Por lo tanto, el sistema es Incompatible (SI).

El sistema es incompatible únicamente para $a = -2$.

Respuesta Correcta: (D)

Ejercicio 2

Sean $A, B \in M_{3 \times 3}(\mathbb{R})$ matrices invertibles. Se sabe que $\det(A) = \frac{1}{2}$ y $\det(B) = 4$.

¿Cuál es el valor del determinante de la matriz $M = 2A^t B^{-1} A$?

(A) $\frac{1}{8}$

(B) $\frac{1}{4}$

(C) $\frac{1}{2}$

(D) 1

(E) 2

Solución: Utilizamos las propiedades de los determinantes para matrices de orden $n = 3$:

1. $\det(kM) = k^n \det(M)$

2. $\det(A^t) = \det(A)$

3. $\det(B^{-1}) = 1/\det(B)$

4. $\det(PQ) = \det(P) \det(Q)$



Aplicando: $\det(2A^t B^{-1} A) = 2^3 \cdot \det(A) \cdot \frac{1}{\det(B)} \cdot \det(A) = 8 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$.

Respuesta Correcta: (C)

Ejercicio 3

Sea V un $\mathbb{R}$ -espacio vectorial, $\dim(V) = 4$. Consideremos $S = \{v_1, v_2, v_3\} \subset V$ conjunto **linealmente independiente**. Se construye un nuevo conjunto $S^* = \{v_1, v_2, v_3, w_1, w_2\} \subset V$, donde w_1 y w_2 son dos vectores cualesquiera de V .

Indicar cuál de las siguientes afirmaciones es la correcta:

- (A) Si w_1 y w_2 son linealmente independientes entre sí, entonces S^* es necesariamente un conjunto generador de V .
- (B) El conjunto S^* siempre es un conjunto generador de V , independientemente de la elección de los vectores w_1 y w_2 .
- (C) Es imposible elegir w_1 y w_2 de tal manera que a partir de los elementos de S^* se pueda extraer una base de V .
- (D) Si $w_1 \in \langle v_1, v_2 \rangle$ y $w_2 \notin \langle v_1, v_2, v_3 \rangle$, entonces el subespacio generado por S^* tiene dimensión exactamente igual a 5.
- (E) Si S^* es un conjunto generador de V , entonces existe al menos un vector en S^* que puede expresarse como combinación lineal de los demás, y al eliminarlo, el conjunto resultante sigue generando a V .

Solución: $\dim(V) = 5$.

Cualquier conjunto con más vectores que la dimensión del espacio es necesariamente linealmente dependiente (LD). Si S^* genera a V , al ser LD, existe al menos un vector que es combinación lineal de los demás. Al eliminarlo, el conjunto resultante sigue generando el mismo subespacio V .

Respuesta Correcta: (E).

Ejercicio 4

En $\mathbb{R}^3$, se considera el plano $\pi : x + y - 2z = 5$ y la recta r dada por sus ecuaciones paramétricas:

$$r : \begin{cases} x = 1 + t \\ y = t \\ z = 1 + t \end{cases}$$

La distancia de la recta r al plano π es:

6/12

(A) $\sqrt{2}$

(B) $2\sqrt{3}$

(C) $\sqrt{6}$

(D) $\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}}$

(E) 2

Solución: La recta tiene vector director $\vec{d} = (1, 1, 1)$ y pasa por $P(1, 0, 1)$. El plano tiene normal $\vec{n} = (1, 1, -2)$. Como $\langle \vec{d}, \vec{n} \rangle = 1 + 1 - 2 = 0$, la recta es paralela al plano. La distancia es:

$$d(r, \pi) = d(P, \pi) = \frac{|1(1) + 1(0) - 2(1) - 5|}{\sqrt{1^2 + 1^2 + (-2)^2}} = \frac{|-6|}{\sqrt{6}} = \sqrt{6}$$

Respuesta Correcta: (C).

Ejercicio 5

En $\mathbb{R}^3$, se considera el plano π que contiene a la recta $r : \begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = 2\lambda \\ z = 2 - \lambda \end{cases}$ y es perpendicular al

plano $\pi_1 : x - y + 2z = 5$.

Entonces, la ecuación reducida del plano π es:

(A) $x - y + 2z = 5$

(D) $3x - 3y - 3z = -3$

(B) $x + 2y - z = -1$

(C) $2x - y + z = 4$

(E) $x + y + z = 3$

Solución: El vector normal $\vec{n}$ del plano buscado debe ser perpendicular al director de r , $\vec{d} = (1, 2, -1)$, y al normal de π_1 , $\vec{n}_1 = (1, -1, 2)$.

$$\vec{n} = \vec{d} \wedge \vec{n}_1 = (3, -3, -3)$$

Usando el punto $P(1, 0, 2)$ de la recta: $3(x - 1) - 3(y - 0) - 3(z - 2) = 0 \Rightarrow 3x - 3y - 3z = -3$.

Respuesta Correcta: (D)

Ejercicio 6

Sea V un espacio vectorial de dimensión 4 y $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ una base de V . Se considera el subespacio $S \subset V$ generado por el conjunto de vectores $A = \{u_1, u_2, u_3, u_4\}$, donde:

• $u_1 = v_1 + v_2$

• $u_3 = v_3 + v_4$

• $u_2 = v_2 + v_3$

• $u_4 = v_1 + kv_4$ (con $k \in \mathbb{R}$)

Indicar la opción correcta:

(A) $\dim(S) = 4$ para todo $k \in \mathbb{R}$.

(B) Existe un único valor de k para el cual A es una base de V .

(C) Existe un único valor de k para el cual $\dim(S) = 3$ y para cualquier otro valor de k , $\dim(S) = 4$.

(D) Existen exactamente dos valores de k para los cuales $\dim(S) = 3$ y para cualquier otro valor de k , $\dim(S) = 4$.

(E) El conjunto A es linealmente dependiente para todo $k \in \mathbb{R}$.

7/12



Solución: Para determinar la dimensión de S , analizamos si el conjunto A es linealmente independiente (LI). Planteamos la combinación lineal nula:

$$\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \alpha_3 u_3 + \alpha_4 u_4 = \vec{0}$$

Sustituimos cada u_i por su expresión en la base B :

$$\alpha_1(v_1 + v_2) + \alpha_2(v_2 + v_3) + \alpha_3(v_3 + v_4) + \alpha_4(v_1 + kv_4) = \vec{0}$$

Reagrupamos los términos según los vectores de la base B :

$$(\alpha_1 + \alpha_4)v_1 + (\alpha_1 + \alpha_2)v_2 + (\alpha_2 + \alpha_3)v_3 + (\alpha_3 + k\alpha_4)v_4 = \vec{0}$$

Como B es una base, sus vectores son linealmente independientes por definición. Por lo tanto, cada coeficiente debe ser nulo, lo que nos da el siguiente sistema de ecuaciones:

1. $\alpha_1 + \alpha_4 = 0 \Rightarrow \alpha_4 = -\alpha_1$
2. $\alpha_1 + \alpha_2 = 0 \Rightarrow \alpha_2 = -\alpha_1$
3. $\alpha_2 + \alpha_3 = 0 \Rightarrow \alpha_3 = -\alpha_2 = \alpha_1$
4. $\alpha_3 + k\alpha_4 = 0$

Sustituimos los resultados de (1) y (3) en la ecuación (4):

$$\alpha_1 + k(-\alpha_1) = 0 \Rightarrow \alpha_1(1 - k) = 0$$

- **Caso $k \neq 1$:** La única solución es $\alpha_1 = 0$, lo que implica que todos los $\alpha_i = 0$. El conjunto A es LI, por lo que $\dim(S) = 4$.
- **Caso $k = 1$:** El valor de α_1 puede ser cualquiera (por ejemplo $\alpha_1 = 1$). Esto implica que el conjunto es Linealmente Dependiente (LD). Específicamente, se cumple que $u_4 = u_1 - u_2 + u_3$. Al eliminar u_4 , los tres vectores restantes son LI, resultando en $\dim(S) = 3$.

Respuesta Correcta: (C)

Ejercicio 7

Sea $A_a = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ a & a & 1 \\ 0 & 1 & a \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3 \times 3}(\mathbb{C})$, donde $a \in \mathbb{C}$.

Indicar cuál de las siguientes afirmaciones es correcta:

- (A) Existen exactamente dos valores de a para los cuales el rango es 2.
- (B) El rango es 3 para todo valor de a .
- (C) Existe exactamente un valor de a donde el rango es 1 y uno donde el rango es 2.
- (D) El rango es 2 para todo valor de a .
- (E) El rango es 3 únicamente para 3 valores distintos de a .



Solución: Proceso de escalerización

1. Realizamos la operación fila $F_2 \leftarrow F_2 - aF_1$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & a & 1-a \\ 0 & 1 & a \end{pmatrix}$$

2. Permutamos las filas F_2 y F_3 para facilitar el cálculo ($F_2 \leftrightarrow F_3$):

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & a \\ 0 & a & 1-a \end{pmatrix}$$

3. Realizamos la operación fila $F_3 \leftarrow F_3 - aF_2$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & a \\ 0 & 0 & 1-a-a^2 \end{pmatrix}$$



El rango de la matriz es igual al número de filas no nulas en su forma escalerizada:

- El rango es 2 si y solo si el último elemento de la diagonal es cero:

$$1 - a - a^2 = 0 \iff a^2 + a - 1 = 0$$

Esta ecuación cuadrática tiene exactamente **dos raíces** en $\mathbb{C}$.

- Para cualquier otro valor de a , el último elemento es no nulo, proporcionando un tercer pivote y resultando en un **rango de 3**.

Conclusión: Existen exactamente dos valores de a para los cuales el rango es 2.

Respuesta Correcta: (A)

Ejercicio 8

Se considera el espacio vectorial $\mathbb{R}_4[x]$ y los siguientes subespacios:

- $W_1 = \{p(x) \in \mathbb{R}_4[x] : p(x) \text{ es divisible por } (x^2 - 1)\},$
- $W_2 = \{p(x) \in \mathbb{R}_4[x] : p(x) = -p(-x) \text{ y } p(2) = 0\}.$

Indicar la opción correcta:

- (A) $W_1 \oplus W_2 = \mathbb{R}_4[x].$
- (B) $W_1 + W_2 = \mathbb{R}_4[x]$, además la suma NO es directa y $\dim(W_1 \cap W_2) = 1.$
- (C) $W_1 \oplus W_2 \neq \mathbb{R}_4[x].$
- (D) $W_1 + W_2 \neq \mathbb{R}_4[x]$, además la suma NO es directa y $\dim(W_1 \cap W_2) = 1.$
- (E) $W_1 + W_2 \neq \mathbb{R}_4[x]$ y además la suma NO es directa y $\dim(W_1 \cap W_2) = 2.$



Solución: W_1 : Un polinomio $p(x) \in \mathbb{R}_4[x]$ es divisible por $(x^2 - 1)$ si se puede escribir como:

$$p(x) = (x^2 - 1)(ax^2 + bx + c)$$

Como el polinomio resultante debe ser de grado ≤ 4 , el cociente es un polinomio de grado ≤ 2 . Este tiene 3 coeficientes libres (a, b, c) , por lo tanto:

$$\dim(W_1) = 3$$

W_2 : La condición $p(x) = -p(-x)$ indica que el polinomio es **impar**. En $\mathbb{R}_4[x]$, los polinomios impares son de la forma $p(x) = ax^3 + bx$. Aplicamos la segunda condición $p(2) = 0$:

$$a(2)^3 + b(2) = 0 \implies 8a + 2b = 0 \implies b = -4a$$

Sustituyendo, $p(x) = ax^3 - 4ax = ax(x^2 - 4)$. Solo hay un grado de libertad (a) , por lo tanto:

$$\dim(W_2) = 1$$

Intersección $W_1 \cap W_2$: Un polinomio está en la intersección si es de la forma $p(x) = ax(x^2 - 4)$ y además es divisible por $(x^2 - 1)$. Para ser divisible por $(x^2 - 1)$, sus raíces deben incluir a 1 y -1. Evaluamos $p(1)$:

$$p(1) = a(1)(1^2 - 4) = -3a$$

Para que $p(1) = 0$, necesariamente $a = 0$. Esto implica que $p(x)$ es el polinomio nulo.

$$W_1 \cap W_2 = \{0\} \implies \text{La suma es directa } (W_1 \oplus W_2)$$

Dimensión de la suma: Por el teorema de la dimensión de la suma:

$$\dim(W_1 \oplus W_2) = \dim(W_1) + \dim(W_2) = 3 + 1 = 4$$

Como $\dim(\mathbb{R}_4[x]) = 5$, concluimos que:

$$W_1 \oplus W_2 \neq \mathbb{R}_4[x]$$

Respuesta Correcta: (C)

Ejercicio 9

Nos interesan las transformaciones lineales $T : \mathcal{M}_{2 \times 2}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}^3$ que verifican las siguientes cuatro condiciones:

- $T \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} = (1, 2, 3)$.
- $T \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} = (0, 1, -2)$
- $T \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = (2, -1, 0)$.
- $T \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 3 & 3 \end{pmatrix} = (3, 2, 1)$.

Indicar la opción correcta:

- (A) No existe ninguna transformación lineal T que verifique las cuatro condiciones.
- (B) Existe una única transformación lineal T que verifica las cuatro condiciones, y ésta además verifica $T \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} = (1, -2, 5)$

10/12

- (C) Existen infinitas transformaciones lineales T que verifiquen las cuatro condiciones, y además, todas verifican $T \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} = (1, -2, 5)$
- (D) Existe una única transformación lineal T que verifica las cuatro condiciones, y ésta además verifica $T \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = (1, 1, 0)$.
- (E) Existen infinitas transformaciones lineales T que verifiquen las cuatro condiciones, y una única que además verifica $T \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = (1, 1, 0)$.

Solución: Sean A_1, A_2, A_3 y A_4 las matrices dadas en el dominio. Observamos la relación entre ellas:

$$A_1 + A_2 + A_3 = \begin{pmatrix} 1+0+2 & -1+3+1 \\ 2+1+0 & 0-1+4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 3 & 3 \end{pmatrix} = A_4$$

Como A_4 es combinación lineal de los otros tres vectores, el conjunto $\{A_1, A_2, A_3, A_4\}$ es linealmente dependiente.

Para que exista una transformación lineal T , se debe cumplir que $T(A_4) = T(A_1 + A_2 + A_3) = T(A_1) + T(A_2) + T(A_3)$. Calculamos la suma de las imágenes:

$$(1, 2, 3) + (2, -1, 0) + (0, 1, -2) = (3, 2, 1)$$

Dado que el resultado coincide exactamente con el valor dado para $T(A_4)$, las condiciones son consistentes. Por lo tanto, existe al menos una transformación lineal que cumple los datos.

Análisis de Unicidad:

- El dominio $M_{2 \times 2}(\mathbb{R})$ tiene dimensión 4.
- Los vectores $\{A_1, A_2, A_3\}$ son linealmente independientes (se puede verificar que ninguno es múltiplo del otro y que no hay combinación lineal nula entre ellos).
- Al definir la imagen de 3 vectores independientes en un espacio de dimensión 4, hay libertad de elección para el cuarto vector de una base.

En consecuencia, existen infinitas transformaciones lineales que cumplen las condiciones iniciales.

Si añadimos una condición sobre una matriz $A_5 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, la transformación será única si y solo si A_5 es linealmente independiente de $\{A_1, A_2, A_3\}$. Al intentar expresar A_5 como combinación lineal:

$$\alpha A_1 + \beta A_2 + \gamma A_3 = \begin{pmatrix} \alpha + 2\gamma & -\alpha + 3\beta + \gamma \\ 2\alpha + \beta & -\beta + 4\gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Esto genera un sistema incompatible (la primera y última ecuación fuerzan valores que no satisfacen las del medio). Al ser A_5 independiente, el conjunto $\{A_1, A_2, A_3, A_5\}$ forma una base de $M_{2 \times 2}(\mathbb{R})$. Por el teorema de existencia y unicidad, definir las imágenes de una base determina una única transformación lineal.

Por lo tanto, existen infinitas transformaciones que cumplen las cuatro condiciones originales, y una única si se agrega la condición sobre la matriz dada en la opción E.

Respuesta Correcta: (E)



11/12

Ejercicio 10

Sean V, W y U espacios vectoriales sobre un mismo cuerpo, con $\dim(V) = 5$ y $\dim(W) = 3$.

Consideremos dos transformaciones lineales $T : V \rightarrow W$ y $S : W \rightarrow U$.

Sabiendo que $\dim(\text{Im}(T)) = 3$ y que la composición $S \circ T : V \rightarrow U$ es la transformación lineal nula (Recordar que la compuesta se define como $S \circ T(v) = S(T(v))$).

Indicar cuál de las siguientes afirmaciones es correcta:

- (A) T es un isomorfismo y $\dim(N(S)) = 0$.
- (B) $\dim(N(T)) = 2$, la transformación T es inyectiva y $\dim(\text{Im}(S)) \geq 1$.
- (C) $\dim(N(T)) = 2$, la transformación T es sobreyectiva y S es la transformación nula.
- (D) $\dim(N(T)) = 2$ y se cumple que $\text{Im}(T)$ está contenida y no es igual a $N(S)$.
- (E) La transformación T es sobreyectiva y se cumple que $\dim(N(S)) = 2$

Solución: Como $\dim(\text{Im}(T)) = 3$ y el espacio de llegada W tiene $\dim(W) = 3$, T es sobreyectiva. La condición $S \circ T = 0$ implica que $\text{Im}(T) \subseteq N(S)$, por lo tanto $W \subseteq N(S)$. Esto significa que $S(w) = 0$ para todo $w \in W$, resultando en que S es la transformación nula.

Respuesta Correcta: (C)



12/12.