

Múltiple opción

VERSIÓN 1.

1	2	3	4	5
B	A	A	A	B

VERSIÓN 2.

1	2	3	4	5
C	B	A	D	C



Justificaciones.

- (1) El plano π podemos verlo como $S = [(1, 0, -1), (0, 1, -1)]$. Con el producto interno dado por

$$\langle (x, y, z), (x', y', z') \rangle = xx' + xy' + yx' + 2yy' + zz',$$

tenemos que $S^\perp = [(1, 0, 1)]$.

Si llamamos P y $P^\perp$ a las proyecciones del vector $v = (1, 1, 1)$ sobre S y $S^\perp$ respectivamente, como $P + P^\perp = v$, tenemos que $P = v - P^\perp$.

Si normalizamos al vector $(1, 0, 1)$ con el producto interno definido arriba tendremos que

$$\left\{ \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}} \right) \right\} \xrightarrow{\text{bon}} S^\perp. \text{ En consecuencia, } P^\perp = \alpha \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}} \right), \text{ donde } \alpha = \frac{\langle (1, 1, 1), \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}} \right) \rangle}{\sqrt{2}}.$$

$$\text{Esto da } P^\perp = \left(\frac{3}{2}, 0, \frac{3}{2} \right) \text{ y por tanto } P = (1, 1, 1) - \left(\frac{3}{2}, 0, \frac{3}{2} \right).$$

$$\text{Operando tenemos } P = \left(\frac{-1}{2}, 1, \frac{-1}{2} \right).$$

- (2) 1) Como la adjunta de una composición es la composición de las adjuntas en orden inverso, $(T^* \circ T)^* = T^* \circ (T^*)^*$, y como $(T^*)^* = T$, tenemos que $(T^* \circ T)^* = T^* \circ T$ por lo que la afirmación 1) es verdadera.

- 2) Por la definición de adjunta de una TL tenemos que

$$\langle T^*(T(v)), v \rangle = \langle T(v), (T^*)^*(v) \rangle = \langle T(v), T(v) \rangle, \text{ que siempre es no negativo. Por tanto la afirmación 2) es verdadera.}$$

- 3) Para probar que dos conjuntos son iguales debemos probar la doble inclusión.

Sea $v \in N(T)$, entonces $T(v) = 0_W$ y por tanto $(T^* \circ T)(v) = T^*(T(v)) = T^*(0_W) = 0_V$, por lo que $v \in N(T^* \circ T)$ y por tanto $N(T) \subseteq N(T^* \circ T)$.

Tomemos ahora $v \in N(T^* \circ T)$, entonces $(T^* \circ T)(v) = T^*(T(v)) = 0_V$.

Calculando el producto interno $\langle (T^* \circ T)(v), v \rangle$ y operando como en la afirmación anterior, tenemos $\langle (T^* \circ T)(v), v \rangle = \langle 0_V, v \rangle = \langle T(v), T(v) \rangle = 0$, lo que nos dice que $T(v) = 0_W$ y por tanto $v \in N(T)$.

Esto prueba que $N(T^* \circ T) \subseteq N(T)$ y que ambos núcleos son iguales, por lo que la afirmación 3) es verdadera.

Por tanto las 3 afirmaciones son verdaderas.

- (3) Sea $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y + z = 0\}$, entonces $T(v) = 2v, \forall v \in S$. Esto nos dice que $\lambda = 2$ es un valor propio y que $mg(2) \geq 2$.

Como T es autoadjunta sus valores propios son reales, además $\lambda = 2$ es un valor propio al menos doble, ya que $mg(2) \leq ma(2)$.

Como la traza de la matriz es igual a la suma de sus valores propios, si fuese $\lambda = 2$ raíz triple, la traza debería valer 6.

Como la traza vale 0 entonces $\lambda = -4$ es el otro valor propio, por lo que T tiene valores propios $\lambda = 2$ y $\lambda = -4$.

Al ser T autoadjunta sabemos que $S_{-4} \perp S_2$, y como $S_2 = [(1, 1, 0), (0, 1, 1)]$, se sigue que $S_{-4} = [(1, -1, 1)]$.

Llamemos $B = \{v_1, v_2, v_3\}$ a la base de vectores propios $\{(1, 1, 0), (0, 1, 1), (1, -1, 1)\}$.

Como $w = (0, 3, 0) = v_1 + v_2 - v_3 \Rightarrow T(w) = T(v_1) + T(v_2) - T(v_3) = 2v_1 + 2v_2 - (-4)v_3$ por la linealidad de T .

Operando obtenemos $T((0, 3, 0)) = (0, 6, 0)$.

Como $(1, -1, 1) \in S_{-4}$ entonces $T((1, -1, 1)) = (-4, 4, -4)$ que es distinto de $(0, 0, 0)$.

Como el determinante de la matriz es el producto de los valores propios, es claro que no puede dar un valor positivo.

Si fuese $T((1, 0, -1)) = (-2, 0, 2)$ esto estaría diciendo que $(1, 0, -1)$ es vector propio para $\lambda = -2$, pero T no tiene ese valor propio.

Por todo lo anterior es claro que la única opción verdadera es $T((0, 3, 0)) = (0, 6, 0)$.

- (4) Llamemos v_1, v_2, v_3 a los tres vectores de la base $\mathcal{A}$. La matriz asociada a T en bases $\mathcal{A}, \mathcal{A}$ nos dice que $T(v_1) = -v_1$, $T(v_2) = -2v_1 + v_2$ y que $T(v_3) = -2v_1 + v_2 - v_3$.

Es claro que $\|T(v_3)\| \neq \|v_3\|$, ya que $T((0, 0, 2)) = (-1, 1, -2)$ y $\|(-1, 1, -2)\| \neq \|(0, 0, 2)\|$.

Por tanto la primera afirmación es falsa.

Si la segunda afirmación fuese verdadera, entonces T debería ser autoadjunto, y por tanto $\langle v, T(w) \rangle = \langle T(v), w \rangle \forall v, w \in \mathbb{R}^3$.

Sin embargo alcanza con tomar $v = v_1$, $w = v_2$ para ver que $\langle v_1, T(v_2) \rangle = -1$ mientras que $\langle T(v_1), v_2 \rangle = 1$, por lo que la segunda afirmación también es falsa.

Por tanto ambas afirmaciones son falsas.

- (5) De la definición de T_a podemos encontrar en forma directa que para la base canónica $\mathcal{C}$ de

$$\mathbb{R}^3 \text{ se tiene } {}_{\mathcal{C}}(T_a)_{\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} 1 & a & a \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Calculando el polinomio característico encontramos $\chi(\lambda) = -(\lambda - 1)^2(\lambda - 2)$ por lo que 1 es valor propio de T_a con $ma(1) = 2$ y 2 es valor propio de T_a con $ma(2) = 1$.

Para ver si T_a es diagonalizable, alcanza con verificar que $mg(1) = 2$, y para esto calculamos el subespacio propio asociado al valor propio 1, $S_1 = N({}_{\mathcal{C}}(T_a)_{\mathcal{C}} - Id)$.

Es inmediato verificar que si $a \neq 0$, $S_1 = [(1, 1, -1)]$ por lo que $mg(1) = 1$ y T no es diagonalizable.

Necesariamente, existe un único valor $a = 0$ para el cual T_a puede ser diagonalizable. Verifiquemos que efectivamente lo es.

Calculando $N({}_{\mathcal{C}}(T_0)_{\mathcal{C}} - Id)$ encontramos que $S_1 = [(-1, 0, 1), (0, 1, 0)]$ por lo que la multiplicidad geométrica $mg(1) = 2$ y entonces T_0 es diagonalizable.



Finalmente, el subespacio S_1 está dado por $S_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x + z = 0\}$.

De los argumentos anteriores se deduce que existe un único valor de a para el cual T_a es diagonalizable, y en ese caso $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x + z = 0\}$ es uno de los subespacios propios.

Ejercicios de Desarrollo.

Problema de Desarrollo (1)

A) Ver libro rojo página 96 (teorema 134).

B) Sean las funciones $\varphi_1 : \varphi_1(x) = 1 \forall x$, $\varphi_2 : \varphi_2(x) = \sqrt{x} \forall x$ y $\varphi_3 : \varphi_3(x) = x \forall x$.

El modelo planteado es pues $f = \alpha\varphi_1 + \beta\varphi_2 + \gamma\varphi_3$.

Evaluando el modelo en $x_1, x_2, \dots, x_n$ tenemos

$$f(x_1) = \alpha + \beta\sqrt{x_1} + \gamma x_1$$

$$f(x_2) = \alpha + \beta\sqrt{x_2} + \gamma x_2$$

$$\vdots$$

$$f(x_n) = \alpha + \beta\sqrt{x_n} + \gamma x_n$$

Llamemos $\mathbb{A}$ a la matriz cuyas columnas son $\varphi_1(X), \varphi_2(X), \varphi_3(X)$, esto es, $\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{x_1} & x_1 \\ 1 & \sqrt{x_2} & x_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & \sqrt{x_n} & x_n \end{pmatrix}$

En notación matricial es lo mismo que expresar $f(X) = \mathbb{A} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}$.

C) Si el sistema es incompatible es porque el término independiente Y no pertenece al subespacio generado por las columnas de $\mathbb{A}$ (que llamaremos S). Para que el sistema sea compatible, el término independiente $\tilde{Y}$ debe pertenecer a S .

De todos estos $\tilde{Y} \in S$, el que minimiza $\|\mathbb{A} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} - Y\|^2$ es precisamente la proyección ortogonal de Y sobre S , o sea $\tilde{Y} = P_S(Y)$ (páginas 100-102 del libro rojo).

D) La deducción de las ecuaciones normales $\mathbb{A}^t \cdot \mathbb{A} \cdot \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} = \mathbb{A}^t \cdot Y$ se encuentra en el libro rojo, página 102.

Para los datos de la letra, $X = (0, 1, 4, 9)$ e $Y = (3, -2, 15, 14)$, tenemos $\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 9 \end{pmatrix}$,

operando, las ecuaciones normales quedan $\begin{pmatrix} 4 & 6 & 14 \\ 6 & 14 & 36 \\ 14 & 36 & 98 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 30 \\ 70 \\ 184 \end{pmatrix}$

Resolviendo las mismas, hallamos (α, β, γ) tales que la función $f(x) = \alpha + \beta\sqrt{x} + \gamma x$ minimiza $\|f(X) - Y\|^2$ para los datos X, Y dados.

Obtenemos $\alpha = 1, \beta = 2, \gamma = 1$, y operando $f(2) = 1 + 2\sqrt{2} + 2 = 3 + \sqrt{2} \cong 5.82$.

3/4



Problema de Desarrollo (2)

- A) Sea $v \in S \cap S'$. Como $v \in S$ y S es invariante bajo T tenemos $T(v) \in S$. De la misma manera como $v \in S'$ y S' es invariante bajo T tenemos $T(v) \in S'$. Concluimos que $T(v) \in S \cap S'$ y entonces $S \cap S'$ es invariante bajo T .
- B) Como $\dim(S'') = 1$ existe $v \neq 0$ en S'' tal que $\{v\}$ es una base de S'' . Como S'' es invariante bajo T entonces $T(v) \in S'' = \langle v \rangle$. Existe $\alpha \in K$ tal que $T(v) = \alpha v$. De esta manera tenemos que v es vector propio de T . Entonces $S'' = \langle v \rangle$ es un subespacio propio.
- C) i) Por las partes anteriores $S_1 \cap S_2$, $S_1 \cap S_3$ y $S_2 \cap S_3$ son subespacios propios de T . Como
- $$S_1 \cap S_2 = \langle (3, -2, -1) \rangle \quad S_1 \cap S_3 = \langle (-3, 1, -1) \rangle \quad S_2 \cap S_3 = \langle (-3, 3, 0) \rangle$$
- y $\{(3, -2, -1), (-3, 1, -1), (-3, 3, 0)\}$ es un conjunto LI, resulta que es una base de vectores propios. Por lo tanto T es diagonalizable.
- ii) Los valores propios son 2 y 1. El subespacio propio asociado a 2 es $S_2 \cap S_3$ y el asociado a 1 es S_1 .

