

GAL 2

Julio 2024



## Resolución del Examen de Julio 2024

Respuesta correcta 8 puntos, 0 si no contestan y -1.5 respuesta incorrecta.  
MO1 Sean  $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  una rotación horaria de centro  $(0,0)$  y ángulo  $\pi/2$ ,  $S$  una simetría respecto de la recta  $x + y = 0$ .

Entonces  $S \circ T$  es una:

- A) Simetría de eje  $\vec{ox}$
- B) Rotación antihoraria de centro  $(0,0)$  y ángulo  $\pi/2$ .
- C) Simetría de eje  $\vec{oy}$ .
- D) Rotación horaria de centro  $(0,0)$  y ángulo  $\pi$

### Resolución:

Tenemos que  $T(1,0) = (0,-1)$  y  $(S \circ T)(1,0) = S(T(1,0)) = S(0,-1) = (1,0)$ . De modo similar  $T(0,1) = (1,0)$  y  $(S \circ T)(0,1) = S(T(0,1)) = S(1,0) = (0,-1)$ .

Entonces  $(S \circ T)(1,0) = (1,0)$  y  $(S \circ T)(0,1) = (0,-1)$ , de donde  $(S \circ T)(x,y) = (x,-y)$ , una simetría de eje  $\vec{ox}$ .

### MO2

Se considera la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & \beta \\ 3 & 0 & \alpha \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3 \times 3}(\mathbb{R})$$

donde  $a, b \in \mathbb{R}$ .

Indicar la opción correcta:

- A) Existe un único valor de  $\alpha$  y un único valor de  $\beta$  para los cuales la matriz  $A$  NO es diagonalizable.
- B) Existe un único valor de  $\alpha$  pero infinitos valores de  $\beta$  para los cuales la matriz  $A$  NO es diagonalizable.
- C) Existen exactamente dos valores de  $\alpha$  para los cuales la matriz  $A$  NO es diagonalizable  $\forall \beta \in \mathbb{R}$ .
- D) Existe un único valor  $\alpha$  para el cual la matriz  $A$  NO es diagonalizable  $\forall \beta \in \mathbb{R}$ .

1/b

**Resolución:**

Si calculamos  $\chi_A(\lambda) = |A - \lambda I|$  obtenemos  $\chi_A(\lambda) = (5 - \lambda)(-1 - \lambda)(\alpha - \lambda)$ .

Si  $\alpha \neq -1, \alpha \neq 5$  entonces  $A$  tiene sus 3 valores propios distintos y por tanto es diagonalizable.

Veamos entonces los casos donde  $A$  **NO** es diagonalizable.

$\alpha = 5$  Esto es, 5 es valor propio con m.a.(5)=2 y tenemos que  $S_5 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x = 0, -6y + \beta z = 0\}$ , m.g.(5)=1 sin que  $\beta$  pueda cambiar eso.

Por tanto si  $\alpha = 5$ ,  $A$  **NO** diagonalizable cualquiera sea el valor de  $\beta$ .

$\alpha = -1$  Ahora -1 es valor propio con m.a.(-1)=2 y tenemos que  $S_{-1} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x = 0, \beta z = 0\}$ . En este caso el valor de  $\beta$  influye en la m.g.(-1).

Si  $\beta = 0$  tenemos m.g.(-1) = 2 y  $A$  resulta diagonalizable, si  $\beta \neq 0$  entonces también  $z = 0$  y m.g.(-1)=1 y  $A$  resulta **NO** diagonalizable.

En síntesis:

$\alpha = 5, \beta$  cualquiera  $A$  **NO** diagonalizable.

$\alpha = -1, \beta = 0$   $A$  diagonalizable.

$\alpha = -1, \beta \neq 0$   $A$  **NO** diagonalizable.

Por tanto existe un único valor  $\alpha$  (que es  $\alpha = 5$ ) para el cual  $A$  **NO** es diagonalizable  $\forall \beta \in \mathbb{R}$ .

**MO3**

Consideremos  $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y - 2z = 0\}$  subespacio de  $\mathbb{R}^3$  y el vector  $v = (1, 0, 1)$ .

Indicar la opción correcta:

A)  $P_S(v) = \left(\frac{7}{6}, \frac{1}{6}, \frac{2}{3}\right)$ .

B)  $P_S(v) = \left(\frac{-1}{6}, \frac{-1}{6}, \frac{1}{3}\right)$ .

C)  $P_S(v) = \left(\frac{5}{6}, \frac{-1}{6}, \frac{4}{3}\right)$ .

D)  $P_S(v) = (0, 0, 0)$ .

**Resolución:**

Tenemos que  $S = [(-1, 0, 0), (2, 0, 1)]$  y por tanto  $S^\perp = [(1, 1, -2)]$ . Si normalizamos obtenemos  $\left\{\frac{1}{\sqrt{6}}(1, 1, -2)\right\}$ , b.o.n.de  $S^\perp$ .

Como  $v = P_S(v) + P_{S^\perp}(v)$ , si hallamos  $P_{S^\perp}(v)$  podremos despejar  $P_S(v) = v - P_{S^\perp}(v)$ .

Como ya tenemos una b.o.n. de  $S^\perp$ ,  $P_{S^\perp}(v) = \langle v, \frac{1}{\sqrt{6}}(1, 1, -2) \rangle \frac{1}{\sqrt{6}}(1, 1, -2)$ .

Operando se obtiene  $P_{S^\perp}(v) = \left(\frac{-1}{6}, \frac{-1}{6}, \frac{2}{6}\right)$ , de donde  $P_S(v) = \left(\frac{7}{6}, \frac{1}{6}, \frac{4}{6}\right)$ .

2/6

**MO4**

Sea  $A \in \mathcal{M}_{4 \times 4}[\mathbb{R}]$  simétrica, con  $\lambda \neq \mu$  dos valores propios tales que  $m.a.(\lambda) = m.g.(\mu) = 2$ . Si  $\{(1, 0, 1, 1), (0, 1, 1, 1)\} \subset S_\mu$ , entonces una base de  $S_\lambda$  es:

- A)  $\{(1, 1, 1, -2), (0, 0, -1, 1)\}$   
 B)  $\{(1, 1, -1, 1), (1, 1, 1, 1)\}$   
 C)  $\{(1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}, \sqrt{2}, 2\sqrt{2}), (-1, 1, 1, -1)\}$   
 D)  $\{(-1/2, 1/2, 1, -1), (2, -2, 1/16, -1/16)\}$

**Resolución:**

Sabemos que  $m.g.(\mu) = 2 \leq m.a.(\mu)$ . Como  $m.a.(\lambda) = 2$  y  $\chi_A$  es de cuarto grado, se deduce que las únicas raíces son  $\lambda$  y  $\mu$ .

$A$  es diagonalizable por ser simétrica.

Como  $m.g.(\mu) = \dim(S_\mu) = 2$  y  $\{(1, 0, 1, 1), (0, 1, 1, 1)\}$  es LI, tenemos que  $\{(1, 0, 1, 1), (0, 1, 1, 1)\}$  es una base de  $S_\mu$ .

Como  $S_\lambda \perp S_\mu$ , buscamos  $(x, y, z, t) \perp \{(1, 0, 1, 1), (0, 1, 1, 1)\}$ , de donde  $S_\lambda = [(1, 1, 1, -2), (0, 0, -1, 1)]$ .

**MO5**

Sea  $T : \mathcal{P}_3[\mathbb{R}] \rightarrow \mathbb{R}$  dada por  $T(a+bx+cx^2) = a+2b-3c$ ,  $\mathcal{P}_3$  con el producto interno  $\langle a+bx+cx^2, a'+b'x+c'x^2 \rangle = aa' + 2bb' + cc'$ . El representante de Riesz de  $T$  es:

- A)  $w : w(x) = 1 + x - 3x^2$   
 B)  $w : w(x) = 1 + 2x - 3x^2$   
 C)  $w = (1, 2, -3)$   
 D)  $w = (1, 1, -3)$

**Resolución:**

El representante de Riesz es el vector  $w \in \mathcal{P}_3[\mathbb{R}]$  tal que  $T(p) = \langle p, w \rangle$   $\forall p \in \mathcal{P}_3[\mathbb{R}]$ .

Tomemos  $w : w(x) = A + Bx + Cx^2$ ,  $p : p(x) = a + bx + cx^2$ , tenemos que  $T(p) = a + 2b - 3c$  y  $\langle p, w \rangle = aA + 2bB + cC$ , además esto debe valer para cualquier  $p \in \mathcal{P}_3[\mathbb{R}]$ .

Si tomamos  $p_1 : p_1(x) = 1$ ,  $p_2 : p_2(x) = x$ ,  $p_3 : p_3(x) = x^2$  tendremos tres ecuaciones  $T(p_i) = \langle p_i, w \rangle$ ,  $i = 1, 2, 3$  de las que despejamos  $A, B, C$  y obtenemos  $w$ .

Operando se obtiene  $A = 1, B = 1, C = -3$ , de donde  $w : w(x) = 1 + x - 3x^2$ .

**MO6**

Sean los EV  $\mathcal{P}_1[x]$  con el producto interno  $\langle p, q \rangle = \int_{-1}^1 p(x)q(x)dx$  y  $\mathbb{R}^3$  con el producto interno usual, y la transformación lineal  $T : \mathcal{P}_1[x] \rightarrow \mathbb{R}^3$  dada por  $T(p) = (p(0), p(1), p(2))$ . Sea  $v = (a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ , entonces la adjunta de  $T$  es:

3/6 -

A)  $T^*(v) = (a + b + c)/2 + (3b/2 + 3c)x.$

B)  $T^*(v) = (a + b + c)/3 + (b + 4c)x.$

C)  $T^*(v) = (a + b + c)/4 + (3b/4 + 5c)x.$

D)  $T^*(v) = (a + b + c)/5 + (3b/5 + 6c)x.$

**Resolución:**

Como  $T^* : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathcal{P}_1[x]$ , dado  $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$  deberá ser  $T^*(a, b, c) = A + Bx$ , donde  $\langle T(p), (a, b, c) \rangle_{\mathbb{R}^3} = \langle p, T^*(a, b, c) \rangle_{\mathcal{P}_1[x]}$ , y esta igualdad debe cumplirse cualquiera sea  $p \in \mathcal{P}_1[x]$ .

Si tomamos  $p_1 : p_1(x) = 1$ ,  $p_2 : p_2(x) = x$  y aplicamos la igualdad anterior, tendremos 2 ecuaciones de las que podremos despejar  $A, B$  en función de  $a, b, c$ .

Operando, se obtiene  $A = \frac{a+b+c}{2}$  y  $B = \frac{3}{2}(b+2c)$ , de donde  $T^*(a, b, c) = \frac{a+b+c}{2} + \frac{3}{2}(b+2c)x.$



4/6.



## 1 Ejercicios de desarrollo

Resultados sin explicación y/o justificación carecen de valor, justifique y explique los razonamientos y conclusiones a las que llegue.

### Desarrollo 1

Sea  $(V, K, +, \cdot)$  un EV,  $T : V \rightarrow V$  un operador lineal.

1. Defina valor propio vector propio de  $T$ :

Ver teórico.

2. Demuestre que  $T$  es invertible si y solo si 0 no es valor propio de  $T$ :

Ver teórico.

3. Demuestre que  $T$  es diagonalizable sii existe una base de  $V$  formada por vectores propios de  $T$ :

Ver teórico.

4. Sean  $A = \{p_1, p_2, p_3\} \xrightarrow{b} \mathcal{P}_2[\mathbb{R}]$  (donde  $p_1 : p_1(x) = 1 \forall x$ ,  $p_2 : p_2(x) = 1 + x^2 \forall x$ ,  $p_3 : p_3(x) = -2 + x \forall x$ ), y  $T : \mathcal{P}_2[\mathbb{R}] \rightarrow \mathcal{P}_2[\mathbb{R}]$  dada por:  
 $T(p_1)(x) = 2$ ,  $T(p_2)(x) = -1 + x^2$ ,  $T(p_3)(x) = -1 + x$ .

Investigue si  $T$  es invertible, si es diagonalizable y en caso de serlo encuentre una base de vectores propios de  $T$  y la forma diagonal:

Tenemos que  $A \xrightarrow{b} \mathcal{P}_2[\mathbb{R}]$  y que

$$T(1) = 2, T(1 + x^2) = -1 + x^2, T(-2 + x) = -1 + x.$$

$$\text{Entonces } M =_A (T)_A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \text{ Se tiene que } \chi_T(\lambda) = |M -$$

$$\lambda I| = (2 - \lambda)(1 - \lambda)^2, \text{ raíces } \lambda = 2 \text{ (simple) y } \lambda = 1 \text{ (doble)}.$$

Operando obtenemos  $N(M - I) = [(2, 1, 0), (-1, 0, 1)]$  y  $N(M - 2I) = [(1, 0, 0)]$  de donde  $M$  es diagonalizable y por tanto  $T$  también lo es.

Una base de vectores propios de  $M$  es  $\{(1, 0, 0), (2, 1, 0), (-1, 0, 1)\}$ .

Recordando que los vectores propios de  $M$  son las coordenadas de los vectores propios de  $T$ , tenemos que una base de vectores propios de  $T$  es la formada por  $\{q_1, q_2, q_3\}$  donde  $\text{coord}_A(q_1) = (1, 0, 0)$  (esto es,  $q_1 = 1 \cdot p_1 + 0 \cdot p_2 + 0 \cdot p_3$ ,  $q_1(x) = 1$ ),  $q_2 : \text{coord}_A(q_2) = (2, 1, 0)$  ( $q_2 = 2p_1 + p_2$ ,  $q_2(x) = 1 + 2(1 + x^2) = 3 + x^2$ ) y  $q_3 : \text{coord}_A(q_3) = (-1, 0, 1)$  ( $q_3 = -p_1 + p_3$ ,  $q_3(x) = -1 + (-2 + x) = -3 + x$ ).

### Desarrollo 2

Sea  $(V, K, +, \cdot, \langle, \rangle)$  un EV de dimensión finita y  $T : v \rightarrow V$  una TL.

1. Enuncie el Teorema Espectral para operadores autoadjuntos:

Ver teórico.

5/6

2. Demuestre que si  $T$  es diagonalizable en una base ortonormal de  $V$  y todas las raíces de  $\chi_T$  son reales entonces  $T$  es autoadjunto:

Ver teórico.

3. Encuentre  $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  autoadjunta tal que  $T(1, -1, 0) = (-1, 1, 0)$  y m.a.(3)=2:

Tenemos que  $u = (1, -1, 0)$  es vector propio asociado a  $\lambda = -1$ . Como  $T$  es autoadjunta sabemos que es diagonalizable y que los subespacios propios son ortogonales.

$$\text{Entonces } S_3 = S_{-1}^\perp = \{(x, y, z) : x = y\} = [\underbrace{(1, 1, 0)}_v, \underbrace{(0, 0, 1)}_w].$$

Tenemos una base de vectores propios  $A = \{u, v, w\}$  donde  $T(u) = -u$ ,  $T(v) = 3v$ ,  $T(w) = 3w$ .

Entonces la  $T$  pedida puede darse mediante los valores en una base:  $T(1, -1, 0) = (-1, 1, 0)$ ,  $T(1, 1, 0) = (3, 3, 0)$ ,  $T(0, 0, 1) = (0, 0, 3)$ .

Si deseamos expresar  $T$  en la base canónica, dado  $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$  primero hallamos  $\text{coord}_A(x, y, z)$ , obteniendo (cuentas mediante)  $\text{coord}_A(x, y, z) = (\frac{x-y}{2}, \frac{x+y}{2}, z)$  y luego

$$T(x, y, z) = \frac{x-y}{2}T(u) + \frac{x+y}{2}T(v) + zT(w) = (x+2y, 2x+y, 3z).$$



6/6