

Examen - Miércoles 10/12/2025, 08:00 hs. - Duración: 03:30 hs.

Nº Prueba	Cédula	Apellido y nombre

Versión 1

Múltiple Opción: Total 50 puntos.

Cada respuesta correcta vale 10 puntos; incorrecta: -3 puntos; no responde: 0 puntos.

Sólo se consideran válidas las respuestas escritas en los casilleros correspondientes.

1	2	3	4	5

Ejercicio 1

Sea T una rotación no trivial en $\mathbb{R}^2$ y S una simetría axial en $\mathbb{R}^2$. Considera las afirmaciones:

- I. $\det(T \circ S^{-1}) = \det(T \circ S)$.
- II. $(T \circ S^{-1})$ es diagonalizable.
- III. $(T \circ S)$ es una rotación.

Entonces:

- A) I y III son verdaderas mientras que II es falsa.
- B) I y II son verdaderas mientras que III es falsa.
- C) II y III son verdaderas mientras que I es falsa.
- D) Solamente I es verdadera.



Ejercicio 2

Sean $a \in \mathbb{R}$ y $A \in M_4(\mathbb{R})$ dada por

$$A = \begin{pmatrix} a & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 6 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & -5 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & -12 \end{pmatrix}$$

Considera las siguientes afirmaciones:

- I. Si $a < -2$, entonces A no es diagonalizable.
- II. Si $a > 2$, entonces el determinante de A es positivo.

Entonces:

- A) Las afirmaciones I y II son ambas verdaderas.
- B) La afirmación I es verdadera pero la afirmación II es falsa.
- C) La afirmación II es verdadera pero la afirmación I es falsa.
- D) Las afirmaciones I y II son ambas falsas.

Ejercicio 3

Una matriz unitaria $A \in M_3(\mathbb{C})$ tiene polinomio característico $\chi_A(t) = -t^3 + it^2 - t + i$.

Sabiendo que $S = [\{(1, 0, 0), (0, 1, i)\}]$ es un subespacio propio de A y $v = (i, i, 1)$, entonces:

- A) $Av = (-1, 1, -i)$.
- B) No hay información suficiente para determinar Av .
- C) $Av = (-i, 1, i)$.
- D) $Av = (0, -1, -i)$.



Ejercicio 4

Se considera en $\mathbb{R}^3$ un producto interno para el cual $A = \{(1, 0, 1), (1, -1, 0), (0, 0, 2)\}$ es una base

ortonormal, y $T: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ tal que la matriz asociada en base canónica E es $E(T)E = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 3 & 3 & -1 \end{pmatrix}$.

Entonces:

- A) T es autoadjunto.
- B) T no es autoadjunto pero es diagonalizable.
- C) T no es autoadjunto ni diagonalizable.
- D) No hay información suficiente para decidir si T es autoadjunto.

Ejercicio 5

Consideramos $\mathbb{R}^3$ con el producto interno $\langle (x, y, z), (x', y', z') \rangle = (3x + y)x' + (x + 2y)y' + 4zz'$.

Si $S = [\{(0, 0, \frac{1}{2}), (1, 0, 0)\}]$ y $v = (-1, 4, 1)$, entonces la proyección ortogonal de v sobre S es:

- A) $P_S(v) = (\frac{1}{3}, 0, 3)$.
- B) $P_S(v) = (1, 0, \sqrt{3})$.
- C) $P_S(v) = (\frac{1}{\sqrt{3}}, 0, 1)$.
- D) $P_S(v) = (\frac{1}{3}, 0, 1)$.

2/11

Ejercicios de desarrollo: 50 puntos.

Todos los resultados deberán estar completamente justificados. Caso contrario, no se otorgarán puntos.

Ejercicio 1. (20 pt.)

Sean V y W espacios vectoriales de dimensión finita con producto interno sobre un cuerpo K . Sea $T : V \rightarrow W$ una transformación lineal y T^* su adjunta.

- Demuestra que $(T^* \circ T)$ es un operador autoadjunto.
- Demuestra que para todo valor propio λ de $(T^* \circ T)$ se tiene que $\lambda \geq 0$.
- Demuestra que $\ker(T^* \circ T) = \ker(T)$.



Ejercicio 2. (15 pt.)

Sean $A = \begin{pmatrix} 0 & -1/2 & 1 \\ 0 & 1/2 & -1/2 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$, y $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} / f(X) = (A^t X)^t \cdot (A^t X)$.

- Escribe $f(x_1, x_2)$ explícitamente, demuestra que es una forma cuadrática y clasifícala.
- Sea $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$. Demuestra que existe un cambio de variable $X = PY$ que permite expresar f como combinación lineal de y_1^2 e y_2^2 . Explica quien es P y como se construye.

Ejercicio 3. (15 pt.)

En $\mathbb{R}^3$ con el producto interno usual se considera un operador lineal $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ dado por

$$T(x, y, z) = (ax + y, x, z).$$

- Encuentra a para que T sea ortogonal.
- Para el valor hallado de a , clasifica T y encuentra sus elementos.

3/11

Examen - Miércoles 10/12/2025, 08:00 hs. - Duración: 03:30 hs.

Nº Prueba	Cédula	Apellido y nombre

Versión 2

Múltiple Opción: Total 50 puntos.

Cada respuesta correcta vale 10 puntos; incorrecta: -3 puntos; no responde: 0 puntos.

Sólo se consideran válidas las respuestas escritas en los casilleros correspondientes.

1	2	3	4	5

Ejercicio 1

Sea T una rotación no trivial en $\mathbb{R}^2$ y S una simetría axial en $\mathbb{R}^2$. Considera las afirmaciones:

- I. $\det(T \circ S^{-1}) = \det(T \circ S)$.
- II. $(T \circ S^{-1})$ es diagonalizable.
- III. $(T \circ S)$ es una rotación.

Entonces:

- A) I y III son verdaderas mientras que II es falsa.
- B) II y III son verdaderas mientras que I es falsa.
- C) I y II son verdaderas mientras que III es falsa.
- D) Solamente I es verdadera.



Ejercicio 2

Sean $a \in \mathbb{R}$ y $A \in M_4(\mathbb{R})$ dada por

$$A = \begin{pmatrix} a & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 6 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & -5 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & -12 \end{pmatrix}.$$

Considera las siguientes afirmaciones:

- I. Si $a < -2$, entonces A no es diagonalizable.
- II. Si $a > 2$, entonces el determinante de A es positivo.

Entonces:

- A) Las afirmaciones I y II son ambas falsas.
- B) La afirmación II es verdadera pero la afirmación I es falsa.
- C) La afirmación I es verdadera pero la afirmación II es falsa.
- D) Las afirmaciones I y II son ambas verdaderas.

Ejercicio 3

Una matriz unitaria $A \in M_3(\mathbb{C})$ tiene polinomio característico $\chi_A(t) = -t^3 + it^2 - t + i$. Sabiendo que $S = \{(1, 0, 0), (0, 1, i)\}$ es un subespacio propio de A y $v = (i, i, 1)$, entonces:

- A) $Av = (0, -1, -i)$.
- B) No hay información suficiente para determinar Av .
- C) $Av = (-i, 1, i)$.
- D) $Av = (-1, 1, -i)$.

Ejercicio 4

Se considera en $\mathbb{R}^3$ un producto interno para el cual $A = \{(1, 0, 1), (1, -1, 0), (0, 0, 2)\}$ es una base ortonormal, y $T: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ tal que la matriz asociada en base canónica E es $E(T)_E = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 3 & 3 & -1 \end{pmatrix}$.

Entonces:

- A) No hay información suficiente para decidir si T es autoadjunto.
- B) T no es autoadjunto pero es diagonalizable.
- C) T no es autoadjunto ni diagonalizable.
- D) T es autoadjunto.

**Ejercicio 5**

Consideramos $\mathbb{R}^3$ con el producto interno $\langle (x, y, z), (x', y', z') \rangle = (3x + y)x' + (x + 2y)y' + 4zz'$. Si $S = \{(0, 0, \frac{1}{2}), (1, 0, 0)\}$ y $v = (-1, 4, 1)$, entonces la proyección ortogonal de v sobre S es:

- A) $P_S(v) = (1, 0, \sqrt{3})$.
- B) $P_S(v) = (\frac{1}{3}, 0, 3)$.
- C) $P_S(v) = (\frac{1}{3}, 0, 1)$.
- D) $P_S(v) = (\frac{1}{\sqrt{3}}, 0, 1)$.

5/11

Ejercicios de desarrollo: 50 puntos.

Todos los resultados deberán estar completamente justificados. Caso contrario, no se otorgarán puntos.

Ejercicio 1. (20 pt.)

Sean V y W espacios vectoriales de dimensión finita con producto interno sobre un cuerpo $\mathbb{K}$. Sea $T : V \rightarrow W$ una transformación lineal y T^* su adjunta.

- Demuestra que $(T^* \circ T)$ es un operador autoadjunto.
- Demuestra que para todo valor propio λ de $(T^* \circ T)$ se tiene que $\lambda \geq 0$.
- Demuestra que $\ker(T^* \circ T) = \ker(T)$.



Ejercicio 2. (15 pt.)

Sean $A = \begin{pmatrix} 0 & -1/2 & 1 \\ 0 & 1/2 & -1/2 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$, y $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} / f(X) = (A^t X)^t \cdot (A^t X)$.

- Escribe $f(x_1, x_2)$ explícitamente, demuestra que es una forma cuadrática y clasifícala.
- Sea $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$. Demuestra que existe un cambio de variable $X = PY$ que permite expresar f como combinación lineal de y_1^2 e y_2^2 . Explica quien es P y como se construye.

Ejercicio 3. (15 pt.)

En $\mathbb{R}^3$ con el producto interno usual se considera un operador lineal $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ dado por

$$T(x, y, z) = (ax + y, x, z).$$

- Encuentra a para que T sea ortogonal.
- Para el valor hallado de a , clasifica T y encuentra sus elementos.

6/11

SOLUCIÓN DEL EXAMEN - Miércoles 10/12/2025 - Duración: 3 horas.

Múltiple Opción: Total 50 puntos.

Cada respuesta correcta vale 10 puntos; incorrecta: -3 puntos; no responde: 0 puntos.

Versión 1

1	2	3	4	5
B	C	A	A	D

Versión 2

1	2	3	4	5
C	B	D	D	C

Ejercicio 1

Sean T una rotación no trivial y S una simetría axial, ambas en $\mathbb{R}^2$. Considera las afirmaciones:

- I. $\det(T \circ S^{-1}) = \det(T \circ S)$.
- II. $(T \circ S^{-1})$ es diagonalizable.
- III. $(T \circ S)$ es una rotación.

Entonces:

- A) I y III son verdaderas mientras que II es falsa.
- B) I y II son verdaderas mientras que III es falsa.
- C) II y III son verdaderas mientras que I es falsa.
- D) Solamente I es verdadera.



Solución

Observamos que una simetría axial en $\mathbb{R}^2$ es diagonalizable en una base ortonormal $\mathbb{B}$ con matriz asociada $_{\mathbb{B}}(T)_{\mathbb{B}} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Vemos que $_{\mathbb{B}}(T)_{\mathbb{B}} = _{\mathbb{B}}(T)_{\mathbb{B}}^{-1} = _{\mathbb{B}}(T)_{\mathbb{B}}^t$ por lo que $S = S^{-1} = S^*$,

haciendo de la simetría axial un operador ortogonal y autoadjunto. Luego, $(T \circ S) = (T \circ S^{-1})$ por lo que la afirmación I es verdadera. Además, $(T \circ S)$ es un operador ortogonal por ser composición de operadores ortogonales; alcanza con calcular $\det(T \circ S) = \det(T) \cdot \det(S) = (1) \cdot (-1) = -1$ para comprobar que $(T \circ S)$ es otra vez una simetría axial, y en consecuencia la afirmación II es verdadera y la III es falsa. Los argumentos aquí expuestos pueden también darse utilizando las matrices asociadas a cada isometría, o viendo la acción de la composición sobre una base ortonormal de $\mathbb{R}^2$, llegando por otros caminos a las mismas conclusiones.

La respuesta correcta es la opción B.

7/11

Ejercicio 2

Sean $a \in \mathbb{R}$ y $A \in M_4(\mathbb{R})$ dada por

$$A = \begin{pmatrix} a & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 6 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & -5 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & -12 \end{pmatrix}.$$

Considera las siguientes afirmaciones:

- I. Si $a < -2$, entonces A no es diagonalizable.
- II. Si $a > 2$, entonces el determinante de A es positivo.

Entonces:

- A) Las afirmaciones I y II son ambas verdaderas.
- B) La afirmación I es verdadera pero la afirmación II es falsa.
- C) La afirmación II es verdadera pero la afirmación I es falsa.
- D) Las afirmaciones I y II son ambas falsas.

Solución Comenzamos notando que $\forall a \in \mathbb{R}$, la matriz A es simétrica, por lo cual es diagonalizable, haciendo que la afirmación I sea falsa.

Para la afirmación II, aplicamos el Teorema de Gerschgorin y encontramos que los círculos S_3 y S_4 están totalmente contenidos en el semiplano izquierdo y el círculo S_2 está totalmente contenido en el semiplano derecho. El círculo S_1 es de centro a y radio 2, por lo que si $a > 2$, la matriz A tiene dos valores propios reales y positivos y otros dos valores propios reales y negativos, dando como resultado determinante positivo (usamos aquí que una matriz simétrica tiene todos sus valores propios y son reales). La respuesta correcta es la opción C.

Ejercicio 3

Una matriz unitaria $A \in M_3(\mathbb{C})$ tiene polinomio característico $\chi_A(t) = t^3 - it^2 + t - i$.

Sabiendo que $S = \{(1, 0, 0), (0, 1, i)\}$ es un subespacio propio de A y $v = (i, i, 1)$, entonces:

- A) $Av = (-1, 1, -i)$.
- B) No hay información suficiente para determinar Av .
- C) $Av = (-i, 1, i)$.
- D) $Av = (0, -1, -i)$.

**Solución**

Factorizando el polinomio característico de A encontramos $\chi_A(t) = t^3 - it^2 + t - i = t^2(t - i) + (t - i) = (t^2 + 1)(t - i) = (t + i)(t - i)^2$. El subespacio S , siendo propio de A , necesariamente es el asociado al valor propio i por la relación entre su m.g. y su m.a. Por otra parte, siendo A una matriz unitaria, los subespacios propios asociados a valores propios diferentes son ortogonales. Esto nos lleva a deducir que $S_{-i} = S^\perp = \{(0, i, 1)\}$. Finalmente, $Av = A(i, i, 1) = A(i, 0, 0) + A(0, i, 1) = i \cdot A(1, 0, 0) + (-i) \cdot (0, i, 1) = i \cdot (i)(1, 0, 0) + (0, -i^2, -i) = (-1, 0, 0) + (0, 1, -i) = (-1, 1, -i)$. La respuesta correcta es la opción A.

8/11

Ejercicio 4

Se considera en $\mathbb{R}^3$ un producto interno para el cual $\mathbb{A} = \{(1, 0, 1), (1, -1, 0), (0, 0, 2)\}$ es una base ortonormal, y $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ tal que la matriz asociada en base canónica $\mathbb{E}$ es ${}_{\mathbb{E}}(T)_{\mathbb{E}} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 3 & 3 & -1 \end{pmatrix}$.

Entonces:

- A) T es autoadjunto.
- B) T no es autoadjunto pero es diagonalizable.
- C) T no es autoadjunto ni diagonalizable.
- D) No hay información suficiente para decidir si T es autoadjunto.

Solución

Calculamos las matrices de cambio de base ${}_{\mathbb{E}}(Id)_{\mathbb{A}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ y ${}_{\mathbb{A}}(Id)_{\mathbb{E}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$.

Computamos ${}_{\mathbb{A}}(T)_{\mathbb{A}} = {}_{\mathbb{A}}(Id)_{\mathbb{E}} \cdot {}_{\mathbb{E}}(T)_{\mathbb{E}} \cdot {}_{\mathbb{E}}(Id)_{\mathbb{A}} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$. Vemos que T tiene matriz asociada

simétrica en una base ortonormal y por lo tanto es autoadjunto. Este ejercicio también puede resolverse buscando la regla de asignación de T a partir de su matriz asociada en base canónica y encontrando directamente la matriz asociada en base $\mathbb{A}$. La respuesta correcta es **A**.

Ejercicio 5

Consideramos $\mathbb{R}^3$ con el producto interno $\langle (x, y, z), (x', y', z') \rangle = (3x + y)x' + (x + 2y)y' + 4zz'$. Si $S = \{(0, 0, \frac{1}{2}), (1, 0, 0)\}$ y $v = (-1, 4, 1)$, entonces la proyección ortogonal de v sobre S es:

- A) $P_S(v) = (\frac{1}{3}, 0, 3)$.
- B) $P_S(v) = (1, 0, \sqrt{3})$.
- C) $P_S(v) = (\frac{1}{\sqrt{3}}, 0, 1)$.
- D) $P_S(v) = (\frac{1}{3}, 0, 1)$.

Solución

Para el producto interno dado tenemos:

- $\langle (0, 0, \frac{1}{2}), (0, 0, \frac{1}{2}) \rangle = 1$
- $\langle (1, 0, 0), (1, 0, 0) \rangle = 3$
- $\langle (0, 0, \frac{1}{2}), (1, 0, 0) \rangle = 0$

En consecuencia, $\mathbb{A} = \{(0, 0, \frac{1}{2}), (\frac{1}{\sqrt{3}}, 0, 0)\}$ es una b.o.n. de S . Proyectando v sobre S a partir de dicha base encontramos $P_S(v) = \langle (-1, 4, 1), (0, 0, \frac{1}{2}) \rangle (0, 0, \frac{1}{2}) + \langle (-1, 4, 1), (\frac{1}{\sqrt{3}}, 0, 0) \rangle (\frac{1}{\sqrt{3}}, 0, 0) = 2 \cdot (0, 0, \frac{1}{2}) + \frac{1}{\sqrt{3}} (\frac{1}{\sqrt{3}}, 0, 0) = (\frac{1}{3}, 0, 1)$, dando como respuesta correcta la opción **D**.



9/11

Ejercicios de desarrollo: 50 puntos.

Todos los resultados deberán estar completamente justificados. Caso contrario, no se otorgarán puntos.

Ejercicio 1. (20 pt.)

Sean V y W espacios vectoriales de dimensión finita con producto interno sobre un cuerpo $\mathbb{K}$. Sea $T : V \rightarrow W$ una transformación lineal y T^* su adjunta.

- Demuestra que $(T^* \circ T)$ es un operador autoadjunto.
- Demuestra que para todo valor propio λ de $(T^* \circ T)$ se tiene que $\lambda \geq 0$.
- Demuestra que $\ker(T^* \circ T) = \ker(T)$.

Solución

- $(T^* \circ T)^* = T^* \circ (T^*)^* = T^* \circ T$ por lo que es un operador autoadjunto.
- Sea λ valor propio de $(T^* \circ T)$, sabemos que $\lambda \in \mathbb{R}$ por lo demostrado en la parte anterior. Además, existe $v \in V, v \neq 0_V$ tal que $(T^* \circ T)(v) = \lambda v$. Calculamos $\langle v, (T^* \circ T)(v) \rangle$. Por la definición de adjunto tenemos que $\langle v, (T^* \circ T)(v) \rangle = \langle T(v), T(v) \rangle = \|T(v)\|^2$. Por la definición de valor propio tenemos que $\langle v, (T^* \circ T)(v) \rangle = \langle v, \lambda v \rangle = \lambda \langle v, v \rangle = \lambda \|v\|^2$. De ambas, $\lambda \|v\|^2 = \|T(v)\|^2$, como $v \neq 0_V$, se deduce que $\lambda \geq 0$.
- $\forall x \in \ker(T) : T(x) = 0_V \Rightarrow (T^* \circ T)(x) = T^*(T(x)) = T^*(0_V) = 0_V \Rightarrow x \in \ker(T^* \circ T)$.
 $\forall x \in \ker(T^* \circ T) : (T^* \circ T)(x) = 0_V \Rightarrow \langle x, (T^* \circ T)(x) \rangle = 0 \Rightarrow \langle T(x), T(x) \rangle = 0 = \|T(x)\|^2 \Rightarrow T(x) = 0_V \Rightarrow x \in \ker(T)$.

Ejercicio 2. (15 pt.)

Sean $A = \begin{pmatrix} 0 & -1/2 & 1 \\ 0 & 1/2 & -1/2 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$, y $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} / f(X) = (A^t X)^t \cdot (A^t X)$.

- Demuestra que f es una forma cuadrática, clasifícala y escribe $f(x, y)$ explícitamente.
- Sea $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$. Demuestra que existe un cambio de variable $X = PY$ que permite expresar f como combinación lineal de y_1^2 e y_2^2 . Explica quien es P y como se construye.

Solución

- $f(X) = (A^t X)^t \cdot (A^t X) = X^t \cdot (A^t)^t \cdot (A^t X) = X^t (A \cdot A^t) X$. Calculando $A \cdot A^t = \begin{pmatrix} \frac{5}{4} & -\frac{3}{4} \\ -\frac{3}{4} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ vemos que es una matriz simétrica, por lo que f es una forma cuadrática. Una matriz simétrica de orden dos tiene dos valores propios reales, como en este caso el determinante de AA^t es $\frac{1}{16}$ y la traza $\frac{7}{4}$ ambos positivos deducimos que AA^t tiene dos valores propios positivos por lo que f es definida positiva (también puede verse aplicando Gerschgorin a la primera fila, viendo que un valor propio es positivo y el determinante es positivo el restante valor propio también debe ser positivo). La expresión explícita buscada es $f(x, y) = \frac{5x_1^2 - 6x_1x_2 + 2y_2^2}{4}$.
- Por el teorema espectral para matrices simétricas, sabemos que existe una matriz P ortogonal tal que $P^t \cdot (AA^t) \cdot P = D$, siendo D una matriz diagonal. La matriz P está dada por el cambio

10/11

de base de una base ortonormal de vectores propios de AA^t a la base canónica de $\mathbb{R}^2$, y el vector $Y = P^t X$ permite entonces expresar f como combinación lineal de y_1^2 e y_2^2 .

Ejercicio 3. (15 pt.)

En $\mathbb{R}^3$ con el producto interno usual se considera un operador lineal $T: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ dado por

$$T(x, y, z) = (ax + y, x, z).$$

- Encuentra a para que T sea ortogonal.
- Para el valor hallado de a , clasifica T y encuentra sus elementos.

Solución

- Para la base ortonormal canónica E de $\mathbb{R}^3$, $E(T)_E = \begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ es una matriz ortogonal si y solo si $a = 0$ lo cual da el valor buscado de a .

- Con el valor $a = 0$, calculamos sus invariantes encontrando determinante -1 y traza 1 . De aquí podemos deducir que, al ser su matriz asociada en una b.o.n. simétrica, entonces es autoadjunto (y diagonalizable) y tiene valores propios reales. Luego, por ser únicamente posibles los valores 1 y -1 , deducimos de su traza y su determinante que el valor propio 1 tiene m.a.=m.g.=2 y el valor propio -1 tiene m.a.=m.g.=1, por lo que es una simetría especular (es decir, simetría respecto de un plano). Es posible también justificarlo calculando su polinomio característico que es $\chi(t) = (1-t)(t^2-1)$. Para encontrar los elementos, calculamos el subespacio propio S_1 que coincide con el plano de simetría. Encontramos $S_1 = [(1, 1, 0), (0, 0, 1)]$. Otra forma de verlo es notando que en la base canónica $T(e_1) = e_2$, $T(e_2) = e_1$ y $T(e_3) = e_3$ por lo que tanto $e_1 + e_2$ como e_3 son vectores propios asociados al valor propio 1 , que da la misma conclusión que el cálculo manual.



m/n