

PRIMER PARCIAL (VERSIÓN 1) - SÁBADO 20 DE SETIEMBRE DE 2025

Nº Prueba	Cédula	Apellido y nombre

Ejercicios múltiple opción.

Total: 25 puntos. Respuesta correcta: 5 puntos; respuesta incorrecta -1 punto; no responde: 0 punto. Sólo se consideran válidas las respuestas escritas en los casilleros y espacios correspondientes.

1	2	3	4	5

Ejercicio 1

Sea $T : \mathbb{R}_2[x] \rightarrow \mathbb{R}_2[x]$ tal que $T(1) = 2 + 2x^2$, $T(x) = 1 + x - x^2$, y $T(x^2) = 2b$, siendo $\{1, x, x^2\}$ la base canónica de $\mathbb{R}_2[x]$, y $b \in \mathbb{R}$. Entonces:

- A) T es diagonalizable para todo $b < -\frac{1}{4}$.
- B) Si $b = -\frac{1}{4}$ una forma de Jordan de T es $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$
- C) T es diagonalizable si y solo si $b = -\frac{1}{4}$.
- D) Si $b < -\frac{1}{4}$ una forma de Jordan de T es $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$



Ejercicio 2

Si todos los círculos de Gerschgorin de una matriz real están en el semiplano derecho ($\operatorname{Re}(z) > 0$), entonces:

- A) Todos los valores propios son reales y positivos.
- B) Todos los valores propios tienen parte real positiva.
- C) Todos los valores propios tienen tanto parte real positiva como parte imaginaria positiva.
- D) Existen tanto valores propios reales como valores propios con parte imaginaria no nula.

Ejercicio 3 Si λ es un valor propio de T y S_λ es el espacio propio asociado, entonces:

- A) S_λ es invariante bajo T .
- B) S_λ no es invariante bajo T .
- C) S_λ es invariante bajo T sí y solo si $\lambda = 1$.
- D) S_λ es invariante bajo T sí y solo si $\dim(S_\lambda) = 1$

Ejercicio 4

Sea $V = \mathcal{M}_{2 \times 2}(\mathbb{R})$, con el p.i. $\langle A, B \rangle = \text{tr}(AB^t)$, y el subespacio $S = \{M \in V : M \text{ es diagonal}\}$. Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \in V$, la proyección ortogonal $P_S(A)$ es:

- A) $\begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{7}} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{7}} \end{pmatrix}$
 B) $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$
 C) $\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{\sqrt{7}} \\ \frac{-1}{\sqrt{7}} & 0 \end{pmatrix}$
 D) $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

**Ejercicio 5**

Se considera en $\mathbb{R}^3$ el producto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ definido como sigue:

$$\langle (x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2) \rangle = 2x_1x_2 + 2y_1y_2 + 4z_1z_2 + x_1z_2 + z_1x_2.$$

Se considera $S \subset \mathbb{R}^3$ el subespacio generado por $(1, 1, 1)$. Una base ortogonal de $S^\perp$ es:

- A) $\{(1, 1, -1), (-2, 3, 0)\}$
 B) $\{(1, 1, -1), (-8, 7, 2)\}$
 C) $\{(1, 1, -2), (-2, 3, 0)\}$
 D) $\{(1, 1, -2), (-8, 7, -\frac{1}{2})\}$

Ejercicio de desarrollo.

Total: 15 puntos.

Sean $(V, \mathbb{K}, +, \cdot)$ un espacio vectorial de dimensión finita, $T : V \rightarrow V$ un operador lineal.

- Define subespacio invariante bajo T .
- Demuestra que V es suma de subespacios invariantes $V = U \oplus W$ si y solo si existe una base $\mathcal{B}$ de V tal que $_{\mathcal{B}}(T)_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} M & 0 \\ 0 & N \end{pmatrix}$ es una matriz por bloques.
- Considera $V = \mathbb{R}_2[x]$, una base $\mathcal{B} = \{2x^2 + x, x^2 - 2x + 2, x + 1\}$ de $\mathbb{R}_2[x]$ y un operador lineal $T : \mathbb{R}_2[x] \rightarrow \mathbb{R}_2[x]$ tal que $T(ax^2 + bx + c) = (7a + 4b - 4c)x^2 + (4a + b + 8c)x + (-4a + 8b + c)$.
 - Escriba la matriz asociada $_{\mathcal{B}}(T)_{\mathcal{B}}$.
 - Encuentra dos subespacios que sean invariantes bajo T . Justifica y escríbelos explícitamente.

2/9

PRIMER PARCIAL (VERSIÓN 2) - SÁBADO 20 DE SETIEMBRE DE 2025

Nº Prueba	Cédula	Apellido y nombre

Ejercicios múltiple opción.

Total: 25 puntos. Respuesta correcta: 5 puntos; respuesta incorrecta -1 punto; no responde: 0 punto.
Sólo se consideran válidas las respuestas escritas en los casilleros y espacios correspondientes.

1	2	3	4	5

Ejercicio 1

Sea $V = M_{2 \times 2}(\mathbb{R})$, con el p.i. $\langle A, B \rangle = \text{tr}(AB^t)$, y el subespacio $S = \{M \in V : M \text{ es diagonal}\}$. Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \in V$, la proyección ortogonal $P_S(A)$ es:

- A) $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
 B) $\begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{7}} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{7}} \end{pmatrix}$
 C) $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$
 D) $\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{\sqrt{7}} \\ \frac{-1}{\sqrt{7}} & 0 \end{pmatrix}$



Ejercicio 2 Si λ es un valor propio de T y S_λ es el espacio propio asociado, entonces:

- A) S_λ es invariante bajo T .
 B) S_λ es invariante bajo T sí y solo si $\lambda = 1$.
 C) S_λ es invariante bajo T sí y solo si $\dim(S_\lambda) = 1$.
 D) S_λ no es invariante bajo T .

Ejercicio 3

Sea $T : \mathbb{R}_2[x] \rightarrow \mathbb{R}_2[x]$ tal que $T(1) = 2 + 2x^2$, $T(x) = 1 + x - x^2$, y $T(x^2) = 2b$, siendo $\{1, x, x^2\}$ la base canónica de $\mathbb{R}_2[x]$, y $b \in \mathbb{R}$. Entonces:

A) T es diagonalizable si y solo si $b = -\frac{1}{4}$.

B) Si $b < -\frac{1}{4}$ una forma de Jordan de T es $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

C) T es diagonalizable para todo $b < -\frac{1}{4}$.

D) Si $b = -\frac{1}{4}$ una forma de Jordan de T es $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

**Ejercicio 4**

Se considera en $\mathbb{R}^3$ el producto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ definido como sigue:

$$\langle (x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2) \rangle = 2x_1x_2 + 2y_1y_2 + 4z_1z_2 + x_1z_2 + z_1x_2.$$

Se considera $S \subset \mathbb{R}^3$ el subespacio generado por $(1, 1, 1)$. Una base ortogonal de $S^\perp$ es:

A) $\{(1, 1, -1), (-2, 3, 0)\}$

B) $\{(1, 1, -2), (-8, 7, -\frac{1}{2})\}$

C) $\{(1, 1, -2), (-2, 3, 0)\}$

D) $\{(1, 1, -1), (-8, 7, 2)\}$

Ejercicio 5

Si todos los círculos de Gerschgorin de una matriz real están en el semiplano derecho ($\text{Re}(z) > 0$), entonces:

A) Todos los valores propios son reales y positivos.

B) Todos los valores propios tienen tanto parte real positiva como parte imaginaria positiva.

C) Existen tanto valores propios reales como valores propios con parte imaginaria no nula.

D) Todos los valores propios tienen parte real positiva.

Ejercicio de desarrollo.

Total: 15 puntos.

Sean $(V, \mathbb{K}, +, \cdot)$ un espacio vectorial de dimensión finita, $T : V \rightarrow V$ un operador lineal.

a) Define subespacio invariante bajo T .

b) Demuestra que V es suma de subespacios invariantes $V = U \oplus W$ si y solo si existe una base

$\mathcal{B}$ de V tal que ${}_{\mathcal{B}}(T)_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} M & 0 \\ 0 & N \end{pmatrix}$ es una matriz por bloques.

c) Considera $V = \mathbb{R}_2[x]$, una base $\mathcal{B} = \{2x^2 + x, x^2 - 2x + 2, x + 1\}$ de $\mathbb{R}_2[x]$ y un operador lineal $T : \mathbb{R}_2[x] \rightarrow \mathbb{R}_2[x]$ tal que $T(ax^2 + bx + c) = (7a + 4b - 4c)x^2 + (4a + b + 8c)x + (-4a + 8b + c)$.

i) Escriba la matriz asociada ${}_{\mathcal{B}}(T)_{\mathcal{B}}$.

ii) Encuentra dos subespacios que sean invariantes bajo T . Justifica y escríbelos explícitamente.

4/9

PRIMER PARCIAL - SÁBADO 20 DE SETIEMBRE DE 2025

Nº Prueba	Cédula	Apellido y nombre

Ejercicios múltiple opción.

Total: 25 puntos. Respuesta correcta: 5 puntos; respuesta incorrecta -1 punto; no responde: 0 punto. Sólo se consideran válidas las respuestas escritas en los casilleros y espacios correspondientes.

Versión 1

1	2	3	4	5
B	B	A	D	A

Versión 2

1	2	3	4	5
A	A	D	C	D



Ejercicio 1

Sea $T: \mathbb{R}_2[x] \rightarrow \mathbb{R}_2[x]$ tal que $T(1) = 2 + 2x^2$, $T(x) = 1 + x - x^2$, y $T(x^2) = 2b$, siendo $\{1, x, x^2\}$ la base canónica de $\mathbb{R}_2[x]$, y $b \in \mathbb{R}$. Entonces:

A) T es diagonalizable para todo $b < -\frac{1}{4}$.

B) Si $b = -\frac{1}{4}$ una forma de Jordan de T es $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

C) T es diagonalizable si y solo si $b = -\frac{1}{4}$.

D) Si $b < -\frac{1}{4}$ una forma de Jordan de T es $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

Solución: La matriz asociada en base canónica es $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2b \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ y su polinomio característico

es $\chi(\lambda) = (1 - \lambda)(\lambda^2 - 2\lambda - 4b)$. Una raíz es $\lambda = 1$ que al ser real es valor propio. Observemos que el polinomio característico puede escribirse también como $\chi(\lambda) = (1 - \lambda)((\lambda - 1)^2 - (1 + 4b))$.

Si $b < -\frac{1}{4}$ las otras dos raíces son complejas conjugadas y por tanto no son valores propios. En este caso T no es diagonalizable y tampoco tiene forma de Jordan.

Si $b > -\frac{1}{4}$ tenemos tres raíces reales y distintas, entonces T es diagonalizable.

Si $b = -\frac{1}{4}$ tenemos $\lambda = 1$ como raíz triple, o sea $m.a.(\lambda) = 3$, falta hallar la $m.g.(\lambda)$ para poder decidir.

Sustituyendo $b = -\frac{1}{4}$ en la matriz A y resolviendo el sistema $(A - Id) = O$ tenemos que el núcleo está dado por $N(A - Id) = \{(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3 : \beta = 0, \gamma = 2\alpha\}$, de donde deducimos para T que

$N(T - Id) = S_1 = \{p \in \mathbb{R}_2[x] : p(x) = \alpha + 0x + 2\alpha x^2\} = [1 + 2x^2]$. Por tanto $\dim(S_1) = 1$, m.g.(λ)=1 y T no es diagonalizable, aunque sí tendrá forma de Jordan.

Como m.a.(1)=3 y m.g.(1)=1, tendremos un bloque de Jordan de tamaño 3 formado por un subbloque de Jordan de tamaño 3. La forma de Jordan entonces queda $J = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, siendo la opción B) (en la versión 1) la correcta.

Ejercicio 2

Si todos los círculos de Gerschgorin de una matriz real están en el semiplano derecho ($\operatorname{Re}(z) > 0$), entonces:

- A) Todos los valores propios son reales y positivos.
- B) Todos los valores propios tienen parte real positiva.
- C) Todos los valores propios tienen tanto parte real positiva como parte imaginaria positiva.
- D) Existen tanto valores propios reales como valores propios con parte imaginaria no nula.

Solución: Como la matriz es real, todos los círculos tienen centro en el eje ox.

Además todos los círculos están a la derecha del cero, por tanto los valores propios tendrán parte real positiva, que es la opción B) en la versión 1.

La matriz $A = \begin{pmatrix} 10 & -1 \\ 1 & 10 \end{pmatrix}$ cumple el enunciado pero su polinomio característico tiene raíces complejas conjugadas, lo que muestra que A) y C) son falsas. La opción D) se descarta porque no pueden existir valores propios reales negativos ya que alguno de los círculos debería cortar al semiplano izquierdo. Por lo que la opción correcta en la versión 1 es la B).

Ejercicio 3 Si λ es un valor propio de T y S_λ es el espacio propio asociado, entonces:

- A) S_λ es invariante bajo T .
- B) S_λ no es invariante bajo T .
- C) S_λ es invariante bajo T sí y solo si $\lambda = 1$.
- D) S_λ es invariante bajo T sí y solo si $\dim(S_\lambda) = 1$

Solución: En el teórico se prueba que los subespacios propios son invariantes cualquiera sea el valor propio λ y sin importar la dimensión, ya que si $v \in S_\lambda$ entonces $T(v) = \lambda v \in S_\lambda$, por ser S_λ un subespacio vectorial (cerrado bajo producto por un escalar). Esto prueba que en la versión 1 A) es verdadera y descarta B), C) y D).



6/9

Ejercicio 4

Sea $V = \mathcal{M}_{2 \times 2}(\mathbb{R})$, con el p.i. $\langle A, B \rangle = \text{tr}(AB^t)$, y el subespacio $S = \{M \in V : M \text{ es diagonal}\}$. Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \in V$, la proyección ortogonal $P_S(A)$ es:

A) $\begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{7}} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{7}} \end{pmatrix}$

B) $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$

C) $\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{\sqrt{7}} \\ \frac{-1}{\sqrt{7}} & 0 \end{pmatrix}$

D) $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$



Solución: Si llamamos $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ a la base canónica de V (que es, además, ortonormal para este producto), tenemos que $S = [e_1, e_4]$ y que $S^\perp = [e_2, e_3]$.

Como $A = 2e_1 + e_2 - e_3 + e_4 = \underbrace{(2e_1 + e_4)}_{A_S \in S} + \underbrace{(e_2 - e_3)}_{A_{S^\perp} \in S^\perp}$, tenemos que $P_S(A) = A_S$, esto es

$P_S(A) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, la opción D) en la versión 1.

Ejercicio 5

Se considera en $\mathbb{R}^3$ el producto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ definido como sigue:

$$\langle (x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2) \rangle = 2x_1x_2 + 2y_1y_2 + 4z_1z_2 + x_1z_2 + z_1x_2.$$

Se considera $S \subset \mathbb{R}^3$ el subespacio generado por $(1, 1, 1)$. Una base ortogonal de $S^\perp$ es:

A) $\{(1, 1, -1), (-2, 3, 0)\}$

B) $\{(1, 1, -1), (-8, 7, 2)\}$

C) $\{(1, 1, -2), (-2, 3, 0)\}$

D) $\{(1, 1, -2), (-8, 7, -\frac{1}{2})\}$

Solución: $S^\perp = \{(x, y, z) : \langle (x, y, z), (1, 1, 1) \rangle = 0\}$, y bajo el producto interno definido obtenemos $S^\perp = \{(x, y, z) : 3x + 2y + 5z = 0\}$.

El vector $(1, 1, -2) \notin S^\perp$, esto descarta C) y D).

En los casos A) y B) ambos vectores $\in S^\perp$, pero $\langle (1, 1, -1), (-2, 3, 0) \rangle \neq 0$, descartando A).

Como $\langle (1, 1, -1), (-8, 7, 2) \rangle = 0$ la opción B) (versión 1) es la verdadera.

7/9

Ejercicio de desarrollo.

Total: 15 puntos.



Sean $(V, \mathbb{K}, +, \cdot)$ un espacio vectorial de dimensión finita, $T: V \rightarrow V$ un operador lineal.

- Define subespacio invariante bajo T .
- Demuestra que V es suma de subespacios invariantes $V = U \oplus W$ si y solo si existe una base $\mathcal{B}$ de V tal que ${}_B(T)_B = \begin{pmatrix} M & 0 \\ 0 & N \end{pmatrix}$ es una matriz por bloques.
- Considera $V = \mathbb{R}_2[x]$, una base $\mathcal{B} = \{2x^2 + x, x^2 - 2x + 2, x + 1\}$ de $\mathbb{R}_2[x]$ y un operador lineal $T: \mathbb{R}_2[x] \rightarrow \mathbb{R}_2[x]$ tal que $T(ax^2 + bx + c) = (7a + 4b - 4c)x^2 + (4a + b + 8c)x + (-4a + 8b + c)$.
 - Escriba la matriz asociada ${}_B(T)_B$.
 - Encuentra dos subespacios que sean invariantes bajo T . Justifica y escríbelos explícitamente.

Solución:

- Sean V un E.V., S un subespacio vectorial de V y $T: V \rightarrow V$ un operador lineal. Diremos que S es invariante bajo T si $T(S) \subseteq S$, esto es, $T(v) \in S \forall v \in S$.
- Pueden consultarse la proposición 67 y la observación 68 del libro rojo para tomar la idea de la prueba. A continuación se proporciona un argumento completo de la misma.

($\Rightarrow$) Si $V = U \oplus W$ esto implica que si $A = \{v_1, v_2, \dots, v_k\} \xrightarrow{b} U$ y $A' = \{v_{k+1}, \dots, v_n\} \xrightarrow{b} W$ entonces $B = A \cup A' \xrightarrow{b} V$. Como $T(v_i) \in U \forall i = 1, 2, \dots, k$ esto significa que $T(v_i)$ es combinación lineal de A y por tanto $\text{coord}_B(T(v_i)) = (a_{1i}, a_{2i}, \dots, a_{ki}, 0, \dots, 0)$. Entonces en las primeras k columnas de ${}_B(T)_B$ tienen sus últimos $n-k$ lugares iguales a 0.

De modo similar, como $T(v_j) \in W \forall j = k+1, \dots, n$, $T(v_j)$ es combinación lineal de A' y por tanto $\text{coord}_B(T(v_j)) = (0, \dots, 0, a_{k+1,j}, \dots, a_{n,j})$. Entonces las últimas $n-k$ columnas tienen sus primeros k lugares iguales a 0. Por tanto la matriz asociada tendrá una estructura de bloques, un bloque M de tamaño $k \times k$, debajo del mismo un bloque O de ceros de tamaño $(n-k) \times k$, luego en el ángulo superior derecho un bloque O de ceros de tamaño $(n-k) \times k$ y debajo del mismo un bloque N de tamaño $(n-k) \times (n-k)$.

($\Leftarrow$) Si existe una base B en la que la matriz asociada presenta la estructura de bloques dada, si llamamos U al subespacio generado por los vectores cuyas coordenadas forman las primeras k columnas, entonces U es invariante bajo T dado que $T(v_i) \in U$ cuando $i=1, 2, \dots, k$ y por tanto cualquier combinación lineal de estos vectores también será un vector de U . Si llamamos W al subespacio generado por los vectores cuyas coordenadas forman las últimas $n-k$ columnas, W es invariante bajo T por argumentos similares a los usados para U .

Además la unión de las bases de U, W es base de V , entonces $V = U \oplus W$.

- Tenemos que $T(2x^2 + x) = 18x^2 + 9x = 9(2x^2 + x)$,
 $T(x^2 - 2x + 2) = -9x^2 + 18x - 18 = -9(x^2 - 2x + 2)$ y
 $T(x + 1) = 9x + 9 = 9(x + 1)$.

La matriz asociada queda ${}_B(T)_B = \begin{pmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 0 & -9 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}$

- De la parte anterior tenemos que $\lambda = 9$ y $\lambda = -9$ son valores propios, si llamamos $U = S_9 = [2x^2 + x, x + 1]$ y $W = S_{-9} = [x^2 - 2x + 2]$, en la base $B' = \{2x^2 + x, x + 1, x^2 - 2x + 2\}$

8/9

la matriz asociada queda $_{B'}(T)_{B'} = \begin{pmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & -9 \end{pmatrix}$ con un bloque 2x2 y otro 1x1. Como los subespacios propios son invariantes, tenemos entonces que U y W son invariantes.

9/9

