



Universidad de la República
Facultad de Ingeniería - IMERL

Geometría y Álgebra Lineal 2

EXAMEN - JUEVES 16 DE JULIO DE 2026

Nº Prueba	Cédula	Apellido y nombre

Ejercicios múltiple opción.

Total: 50 puntos. Respuesta correcta: 10 puntos, respuesta incorrecta -2 puntos, no responde: 0 punto.
Sólo se consideran válidas las respuestas escritas en los casilleros correspondientes.

1	2	3	4	5

Ejercicio 1. Sea $T: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$ una transformación lineal tal que:

1. $\text{mg}(3) = 2$.
2. $(3 - \lambda)^3$ divide al polinomio característico de T .
3. $\dim(N(T - 4Id)) \neq \{0\}$.

La forma de Jordan de T es:

A) $\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$

B) $\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$

C) $\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$

D) $\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$

Ejercicio 2. Sea V un $\mathbb{R}$ -espacio vectorial con producto interno, y sea $T: V \rightarrow V$ un operador lineal. Definimos $S = T^* \circ T$.

Indicar la opción correcta:

- A) Los valores propios de S son todos reales pero S no necesariamente es diagonalizable.
- B) Los valores propios de S son todos reales y S es diagonalizable.
- C) Todas las raíces del polinomio característico de S tienen módulo 1, pero S puede no ser diagonalizable.
- D) S es diagonalizable y todos sus valores propios tienen módulo 1.



2

Ejercicio 3. En $\mathbb{R}^2$ se considera el producto interno

$$\langle (x_1, y_1), (x_2, y_2) \rangle = x_1 x_2 + 2 y_1 y_2,$$

y el operador lineal $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ definido como $T(x, y) = (x + y, x)$. El adjunto de T respecto de este producto interno está dado por:

- A) $T^*(x, y) = (x + y, x)$.
- B) $T^*(x, y) = \left(x + 2y, \frac{x}{2}\right)$.
- C) $T^*(x, y) = \left(x + \frac{y}{2}, 2x\right)$.
- D) $T^*(x, y) = (2x + 2y, x)$.

Ejercicio 4. Se considera en $\mathbb{C}^2$ el producto interno usual. Sea $T : \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}^2$ isometría tal que

$$T(2, 1) = (2i, i) \quad \text{y} \quad \text{traza}_C(T) = 0 \quad C = \{(1, 0), (0, 1)\}.$$

Indicar la opción correcta:

- A) $T(1, -2) = (i, -2i)$.
- B) $T(1, -2) = (-i, 2i)$.
- C) $T(1, -2) = (1, -2)$.
- D) $T(1, -2) = (-1, 2)$.

Ejercicio 5. Consideremos la forma cuadrática $q : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $q(x, y, z) = x^2 + 4y^2 + z^2 + 6xz$, para todo $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.

Indicar la opción correcta:

- A) q es definida positiva.
- B) q es semidefinida positiva.
- C) q es indefinida.
- D) q es definida negativa.

2/8



Ejercicios de desarrollo. (50 puntos)

Ejercicio 6. (20 puntos)

1. Sea $T: \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$ un operador lineal.
 - a) (2 puntos) Definir multiplicidad algebraica y multiplicidad geométrica de un valor propio λ de T .
 - b) (8 puntos) Demostrar que T es diagonalizable si y solamente si $m_a(\lambda) = m_g(\lambda)$ para todo λ valor propio de T .
2. (10 puntos) Sea $T: \mathbb{C}^3 \rightarrow \mathbb{C}^3$ tal que

$${}_C(T)_C = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -3 \end{pmatrix},$$

siendo C la base canónica de $\mathbb{C}^3$. Investigar si el operador T es diagonalizable. Justificar la respuesta.

Ejercicio 7. (30 puntos)

1. (9 puntos) Sea V un $\mathbb{R}$ -espacio vectorial con producto interno de dimensión finita, y sea $T: V \rightarrow V$ una transformación lineal. Probar que las siguientes afirmaciones son equivalentes:
 - i) T es autoadjunta.
 - ii) ${}_B(T)_B$ es simétrica para toda base ortonormal B de V .
 - iii) Existe B base ortonormal de V tal que ${}_B(T)_B$ es simétrica.
2. (3 puntos) Enunciar el Teorema espectral para transformaciones lineales autoadjuntas.
3. (8 puntos) Probar que si $A \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{R})$ es simétrica entonces existen $P, D \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{R})$, P ortogonal y D diagonal, tales que $A = PDP^t$.
4. (10 puntos) Sea $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, hallar $P, D \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{R})$, P ortogonal y D diagonal, tales que $A = PDP^t$.

3/8



Solución del examen

Julio de 2026

Geometría y Álgebra Lineal 2

16 de julio de 2026

Respuestas del múltiple opción:

1	2	3	4	5
C	B	B	A	C

Ejercicio 1.

Sea $T: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$ una transformación lineal tal que:

- $\text{mg}(3) = 2$.
- $(3 - \lambda)^3$ divide al polinomio característico de T .
- $\dim(N(T - 4Id)) \neq \{0\}$.

La forma de Jordan de T es:

$$\begin{array}{ll} \text{A)} \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} & \text{B)} \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \end{array}$$

$$\text{C)} \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\text{D)} \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

Solución.

Usando que $(3 - \lambda)^3$ divide al polinomio característico de T , tenemos que $\text{ma}(3) \geq 3$. Por otro lado, como $\dim(N(T - 4Id)) \neq \{0\}$, tenemos que 4 es valor propio, y por lo tanto $\text{ma}(4) \geq 1$. Como la suma de las multiplicidades algebraicas es 4, tiene que ser $\text{ma}(3) = 3$ y $\text{ma}(4) = 1$. Tenemos entonces que en la forma de Jordan de T el 3 aparece tres veces en la diagonal y el 4 aparece una vez. Luego, el bloque de Jordan asociado a 4 tiene tamaño uno, y el bloque de Jordan asociado a 3 es de tamaño tres. Como $\text{mg}(3) = 2$, hay dos subbloques de Jordan asociados a 3, que tiene que ser de tamaño uno y dos. Por lo tanto, la forma de Jordan de T es

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

La opción correcta es la C).

Ejercicio 2. Sea V un $\mathbb{R}$ -espacio vectorial con producto interno, y sea $T: V \rightarrow V$ un operador lineal. Definimos $S = T^* \circ T$.

Indicar la opción correcta:

- A) Los valores propios de S son todos reales pero S no necesariamente es diagonalizable.



- B) Los valores propios de S son todos reales y S es diagonalizable.
- C) Todas las raíces del polinomio característico de S tienen módulo 1, pero S puede no ser diagonalizable.
- D) S es diagonalizable y todos sus valores propios tienen módulo 1.

Solución.

Se tiene que $S^* = (T^* \circ T) = T^* \circ (T^*)^* = T^* \circ T = S$, es decir, S es autoadjunto. Por lo tanto, el Teorema espectral para operadores autoadjuntos nos dice que S es diagonalizable. Además, como S es autoajunto, todos sus valores propios son reales. La opción B) es correcta.

Las opciones A) y C) son falsas dado que el Teorema espectral para operadores autoadjuntos nos dice que S siempre es diagonalizable. La opción D) es falsa, pues tenemos el siguiente contraejemplo: en $\mathbb{R}^2$ con el producto interno usual, definimos $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ como $T(x, y) = (2x, 2y)$ para todo $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. En este caso, tenemos que $T^* = T$, y resulta que $S(x, y) = (4x, 4y)$ para todo $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. El único valor propio de S es 4, que no tiene módulo 1.

Ejercicio 3. En $\mathbb{R}^2$ se considera el producto interno

$$\langle (x_1, y_1), (x_2, y_2) \rangle = x_1 x_2 + 2 y_1 y_2,$$

y el operador lineal $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ definido como $T(x, y) = (x + y, x)$. El adjunto de T respecto de este producto interno está dado por:

- A) $T^*(x, y) = (x + y, x)$.
- B) $T^*(x, y) = \left(x + 2y, \frac{x}{2}\right)$.
- C) $T^*(x, y) = \left(x + \frac{y}{2}, 2x\right)$.
- D) $T^*(x, y) = (2x + 2y, x)$.

Solución.

Tenemos que $\langle T(x_1, y_1), (x_2, y_2) \rangle = \langle (x_1, y_1), T^*(x_2, y_2) \rangle$ para todos $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2$. Por un lado,

$$\langle T(x_1, y_1), (x_2, y_2) \rangle = \langle (x_1 + y_1, x_1), (x_2, y_2) \rangle = (x_1 + y_1)x_2 + 2x_1 y_2 = (x_2 + 2y_2)x_1 + x_2 y_1.$$

Por otro lado, si $T^*(x_2, y_2) = (a, b)$, tenemos que

$$\langle (x_1, y_1), T^*(x_2, y_2) \rangle = \langle (x_1, y_1), (a, b) \rangle = ax_1 + 2by_1.$$

Obtenemos que

$$(x_2 + 2y_2)x_1 + x_2 y_1 = ax_1 + 2by_1,$$

por lo que tiene que ser $a = x_2 + 2y_2$, y $2b = x_2$. Por lo tanto, concluimos que $T^*(x_2, y_2) = \left(x_2 + 2y_2, \frac{x_2}{2}\right)$. Es decir, $T^*(x, y) = \left(x + 2y, \frac{x}{2}\right)$ para todo $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. La opción correcta es la B).

Ejercicio 4. Se considera en $\mathbb{C}^2$ el producto interno usual. Sea $T: \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}^2$ isometría tal que

$$T(2, 1) = (2i, i) \quad \text{y} \quad \text{traza}(C(T)_C) = 0 \quad C = \{(1, 0), (0, 1)\}.$$

Indicar la opción correcta:

- A) $T(1, -2) = (i, -2i)$.
- B) $T(1, -2) = (-i, 2i)$.



C) $T(1, -2) = (1, -2)$.

D) $T(1, -2) = (-1, 2)$.

Solución.

Como T es una isometría de $\mathbb{C}^2$ en $\mathbb{C}^2$, es un operador unitario. El teorema espectral para operadores unitarios nos dice que T es diagonalizable y que los subespacios propios asociados a valores propios distintos son ortogonales entre sí. Luego la traza de $c(T)_C$ es la suma de los valores propios (con multiplicidad). Como $T(2, 1) = (2i, i) = i(2, 1)$ tenemos que i es valor propio de T . Luego, la traza de $c(T)_C$ es 0, resulta que $-i$ es el otro valor propio de T . Además, el subespacio propio asociado a $-i$ es el espacio perpendicular al vector $(2, 1)$. Como $(1, -2)$ es perpendicular a $(2, 1)$, tenemos que es vector propio asociado a i y por lo tanto $T(1, -2) = (i, -2i)$. La respuesta correcta es la A).

Ejercicio 5. Consideremos la forma cuadrática $q: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $q(x, y, z) = x^2 + 4y^2 + z^2 + 6xz$, para todo $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.

Indicar la opción correcta:

A) q es definida positiva.

B) q es semidefinida positiva.

C) q es indefinida.

D) q es definida negativa.

Solución.

La matriz simétrica asociada a q es $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 4 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Calculando el polinomio característico de A obtenemos

que $\chi_A(\lambda) = (4 - \lambda)^2(-2 - \lambda)$. Es decir, los valores propios de A son 4 y -2 , por lo que q es indefinida. La respuesta correcta es la C).

6/8



Ejercicios de desarrollo. (50 puntos)

Ejercicio 6. (20 puntos) Sea $T: \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$ un operador lineal.

1. (2 puntos) Definir multiplicidad algebraica y multiplicidad geométrica de un valor propio λ de T .
2. (8 puntos) Demostrar que T es diagonalizable si y solamente si $\text{ma}(\lambda) = \text{mg}(\lambda)$ para todo λ valor propio de T .
3. (10 puntos) Sea $T: \mathbb{C}^3 \rightarrow \mathbb{C}^3$ tal que

$${}_C(T)_C = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -3 \end{pmatrix}$$

siendo C la base canónica de $\mathbb{C}^n$. Investigar si el operador T es diagonalizable. Justificar la respuesta.

Solución.

1. Ver Definición 60 en la página 48 del *Libro rojo*.
2. Ver Corolario en la página 3 de las notas *Complemento de diagonalización*.
3. Calculando el polinomio característico de T obtenemos que $\chi_T(\lambda) = (-3-\lambda)(2+\lambda)^2$. Por lo tanto, $\text{ma}(-3) = 1$ y $\text{ma}(-2) = 2$. Calculando

$${}_C(T)_C - (-2)I = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix},$$

vemos que tiene rango 2, y por lo tanto su núcleo tiene dimensión 1. Luego $\dim(S_{-2}) = 1$, es decir, $\text{mg}(-2) = 1$. Como $\text{ma}(-2) \neq \text{mg}(-2)$, la parte 2. de este ejercicio nos permite concluir que T no es diagonalizable.

Ejercicio 7. (30 puntos)

1. (9 puntos) Sea V un $\mathbb{R}$ -espacio vectorial con producto interno de dimensión finita, y sea $T: V \rightarrow V$ una transformación lineal. Probar que las siguientes afirmaciones son equivalentes:
 - i) T autoadjunta.
 - ii) ${}_B(T)_B$ es simétrica para toda base ortonormal B de V .
 - iii) Existe B base ortonormal de V tal que ${}_B(T)_B$ es simétrica.
2. (3 puntos) Enunciar el Teorema espectral para transformaciones lineales autoadjuntas.
3. (8 puntos) Probar que si $A \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{R})$ es simétrica entonces existen $P, D \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{R})$, P ortogonal y D diagonal, tales que $A = PDP^t$.

4. (10 puntos) Sea $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, hallar $P, D \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{R})$, P ortogonal y D diagonal, tales que $A = PDP^t$.

1. Ver Teorema 5.1 en la página 10 de las notas *Transformaciones lineales en espacios con P.I.*.
2. Ver Teorema 6.7 en la página 14 de las notas *Transformaciones lineales en espacios con P.I.*.
3. Ver Teorema 6.9, parte (a), en la página 15 de las notas *Transformaciones lineales en espacios con P.I.*.
4. Tenemos que $\chi_A(\lambda) = (4-\lambda)(1-\lambda)^2$. Por lo tanto, los valores propios de A son 4 y 1. Calculando el subespacio propio asociado a 4 obtenemos que $S_4 = \{(x, x, x): x \in \mathbb{R}\}$. Calculando el subespacio propio asociado a 1, obtenemos que $S_1 = \{(x, y, -x-y): x, y \in \mathbb{R}\}$. Considerando el producto interno usual de $\mathbb{R}^3$, tenemos



que $\left\{ \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}} \right) \right\}$ es una base ortonormal de S_4 . Aplicando el método de Gram-Schmidt y normalizando el resultado, obtenemos que $\left\{ \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{-1}{\sqrt{2}} \right), \left(\frac{-1}{\sqrt{6}}, \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}, \frac{-1}{\sqrt{6}} \right) \right\}$ es una base ortonormal de S_1 . Luego, $\mathcal{B} = \left\{ \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}} \right), \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{-1}{\sqrt{2}} \right), \left(\frac{-1}{\sqrt{6}}, \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}, \frac{-1}{\sqrt{6}} \right) \right\}$ es una base ortonormal de $\mathbb{R}^3$ formada por vectores propios de A . Luego, si denotamos por $\mathcal{C}$ a la base canónica de $\mathbb{R}^3$, que es una base ortonormal, y definimos

$$P = {}_c(Id)_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{-1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix},$$

P es una matriz ortogonal dado que sus columnas forman una base ortonormal de $\mathbb{R}^3$. Por lo tanto $P^{-1} = P^t$. Como $\mathcal{B}$ es una base formada por vectores propios, tenemos que $D = P^{-1}AP = P^tAP$ es una matriz diagonal. Esto es equivalente a $A = PDP^t$.

8/8.