

Universidad de la República - Facultad de Ingeniería

Examen de Métodos Numéricos

15 de diciembre de 2022

Duración: 3 horas

El repartido consta de 9 carillas impresas.



Nombre completo:

Cédula:

- Observaciones:**
- Las hojas del repartido entregado deben mantenerse engrapadas durante toda la evaluación.
 - Todas las respuestas deben estar contenidas en el repartido entregado; no se aceptarán hojas adicionales.
 - Solamente se tomarán en cuenta las resoluciones de los problemas que se encuentren debajo de su correspondiente enunciado.
 - Solamente está permitido el uso de calculadoras estándar.
 - No está permitido el uso de material adicional.
 - La evaluación está basada en un esquema de 100 puntos, donde el puntaje mínimo para la aprobación es de 60.

Problema 1 (40 pt.)

Considere el sistema de ecuaciones lineales $Ax = b$, donde A es una matriz cuadrada e invertible.

a) Deduzca el método de Jacobi y expréselo matricialmente.



b) Demuestre que si A es diagonal dominante estricta por filas, entonces el método de Jacobi converge para toda condición inicial.

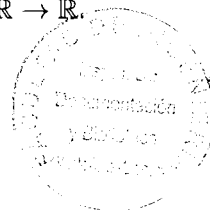
- c) Para la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}$ determine si Jacobi converge para toda condición inicial.



- d) Para la matriz anterior, determine si alguna relajación de Jacobi converge. En caso afirmativo, encuentre el intervalo (a, b) tal que si $w \in (a, b)$ la relajación converge.

Problema 2 (30 pt.)

- a) Enuncie y demuestre el teorema de orden de convergencia para el MIG asociado a $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.



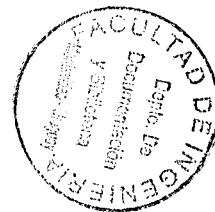
b) Se considera el siguiente esquema: $\begin{cases} x_0 \in \mathbb{R} \\ x_{n+1} = ax_n + b \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \end{cases}$; donde $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f \in C^p$, con una raíz α tal que $f'(\alpha) \neq 0$.

Encuentre los valores de a y b para los cuales el método anterior converge a α , y además lo hace con el mayor orden de convergencia posible.



$a =$	$b =$
-------	-------

- c) Sean $f : f(x) = \log(x) + \frac{x}{2}$, $x_0 = 1$. Usando los valores de la parte anterior, calcule x_1 y x_2 (trabaje con tres cifras después de la coma).



$x_1 =$	$x_2 =$
---------	---------

Problema 3 (30 pt.)

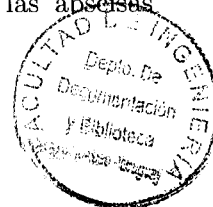
Considere la función de Runge: $f(x) = \frac{1}{1+25x^2}$.

- a) Halle el polinomio $P_1(x)$ que interpola a f por las abscisas $\{-1, 0, 1\}$.



$P_1(x) =$

- b) Utilice el método de Newton para hallar el polinomio $P_2(x)$ que interpola a f por las abscisas $\{-1, 0, \frac{1}{2}, 1\}$.



$P_2(x) =$

c) Enuncie el teorema de acotación del error en interpolación polinómica.



d) Explique el fenómeno de Runge, e indique cómo se podría disminuir este efecto.

Resolución del Examen Diciembre 2022



1 Resolución

Problema 1) a) Ver teórico.

b) Ver teórico.

c) Operando, tenemos $Q_J = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$. Su polinomio característico es $P(\lambda) = \lambda^2 + 4$, con raíces $\lambda = \pm 2i$.

Ambas raíces tienen módulo 2, por lo que $\rho(Q_J) = 2$, el radio espectral es mayor a 1 y por tanto Jacobi no converge.

d) La matriz de iteración del método relajado es $Q_{JOR} = wQ_J + (1-w)I$, con valores propios $z = w\lambda + (1-w)$.

Tenemos que $|z| < 1$ sii $(1-w)^2 + 4w^2 < 1$ sii $5w^2 - 2w < 0$ sii $w \in (0, \frac{2}{5})$.

Por tanto $(a, b) = (0, \frac{2}{5})$.

Problema 2) a) Ver teórico.

b) Tenemos $g(x) = ax + b \frac{f(x)}{f'(x)}$.

Derivando obtenemos $g'(\alpha) = a + b$ y $g''(\alpha) = -b \frac{f''(\alpha)}{f'(\alpha)}$.

Tomando $a = 1$, $b = -1$ tenemos $g'(\alpha) = 0$ y $g''(\alpha) = \frac{-f''(\alpha)}{f'(\alpha)}$, es Newton-Raphson.

c) Tenemos
$$\begin{cases} x_0 = 1 \\ x_{n+1} = x_n - \left(\frac{\log(x_n) + \frac{x}{2}}{\frac{1}{x_n} + \frac{1}{2}} \right) \end{cases}$$

Operando, obtenemos $x_1 = \frac{2}{3}$ y $x_2 = \frac{2}{3} - \frac{\log(\frac{2}{3}) + \frac{1}{3}}{\frac{3}{2} + \frac{1}{2}}$, que redondeados a tres decimales nos da $x_1 = 0.667$, $x_2 = 0.703$.

Problema 3) a) Utilizando el método de Lagrange:

$$l_0(x) = \frac{(x-0)(x-1)}{(-1-0)(-1-1)} = \frac{x^2 - x}{2}$$

$$l_1(x) = \frac{(x+1)(x-1)}{(0+1)(0-1)} = -x^2 + 1$$

$$l_2(x) = \frac{(x+1)(x-0)}{(1+1)(1-0)} = \frac{x^2+x}{2}$$

Luego, como $y_0 = f(-1) = \frac{1}{26}$, $y_1 = f(0) = 1$, $y_2 = f(1) = \frac{1}{26}$, se tiene:

$$P_2(x) = y_0 l_0(x) + y_1 l_1(x) + y_2 l_2(x) = -\frac{25}{26}x^2 + 1 \approx -0.962x^2 + 1$$

- b) Primero se halla $P_3(x)$, el polinomio que interpola a f por las abscisas $\{-1, -\frac{1}{2}, 0, 1\}$, a partir de $P_2(x)$, como sigue:

$$P_3(x) = P_2(x) + q_2(x),$$

donde $q_2(x) = a_2(x+1)(x-0)(x-1)$. Imponiendo que $P_3(-\frac{1}{2}) = P_2(-\frac{1}{2}) + q_2(-\frac{1}{2}) = f(-\frac{1}{2}) = \frac{1}{1+\frac{25}{4}}$, se halla $a_2 \approx -1.658$. Luego

$$P_3(x) = -0.962x^2 + 1 - 1.685x^3 + 1.658x$$

A modo de verificación, puede comprobarse que el polinomio anterior efectivamente interpola a f en las abscisas $\{-1, -\frac{1}{2}, 0, 1\}$.

Finalmente se halla $P_4(x)$, el polinomio que interpola a f por las abscisas $\{-1, -\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}, 1\}$, a partir de $P_3(x)$, como sigue:

$$P_4(x) = P_3(x) + q_3(x),$$

donde $q_3(x) = a_3(x+1)(x+\frac{1}{2})(x-0)(x-1)$. Imponiendo que $P_4(\frac{1}{2}) = P_3(\frac{1}{2}) + q_3(\frac{1}{2}) = f(\frac{1}{2}) = \frac{1}{1+\frac{25}{4}}$, se halla $a_3 \approx 3.316$. Luego

$$P_4(x) = 3.316x^4 - 4.278x^2 + 1$$

A modo de verificación, puede comprobarse que el polinomio anterior efectivamente interpola a f en las abscisas $\{-1, -\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}, 1\}$.

c) Ver teórico.

d) Ver teórico.

