



Universidad de la República - Facultad de Ingeniería

Examen de Métodos Numéricos

6 de febrero de 2023

Duración: 3 horas

El repartido consta de 8 carillas impresas.

Nombre completo:

Cédula:

- Observaciones:**
- Las hojas del repartido entregado deben mantenerse engrapadas durante toda la evaluación.
 - Todas las respuestas deben estar contenidas en el repartido entregado; no se aceptarán hojas adicionales.
 - Solamente se tomarán en cuenta las resoluciones de los problemas que se encuentren debajo de su correspondiente enunciado.
 - Solamente está permitido el uso de calculadoras estándar.
 - No está permitido el uso de material adicional.
 - La evaluación está basada en un esquema de 100 puntos, donde el puntaje mínimo para la aprobación es de 60.



Problema 1 (40 pt.)

Considere un sistema de ecuaciones lineales $Ax = b$, donde A es una matriz cuadrada invertible, y A no posee elementos nulos en su diagonal.

- a) Mostrar que el método de Jacobi se puede expresar en la forma $x^{(x+1)} = Qx^{(k)} + r$. Expresar Q y r en función de A y b .

- b) Probar que el vector de errores verifica: $e^{(k+1)} = Q^{k+1}e^{(0)}, \forall k \geq 0$.

- c) Se considera ahora el sistema lineal $Ax = b$, con $b = (0, 1, 1)^t$ y $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}$. Para este sistema, cuya solución es $\alpha = (0, -1, -1)^t$, determine Q y r de Jacobi.

- d) Encontrar un vector inicial $x^{(0)}$ tal que la sucesión de Jacobi no converge a α . *Sugerencia: trabajar con las potencias pares de Q .*



- e) Expresar la matriz Q_w del método de Jacobi relajado en función de w . ¿Existe $w > 0$ tal que la relajación sea convergente para todo $x^{(0)}$? Justificar.

Problema 2 (30 pt.)

a) Enunciar el Teorema del Error por Interpolación Polinómica.

b) Se considera $f : f(x) = e^x$ definida en el intervalo $[0, 1]$. Para cada entero positivo n , expresar el polinomio interpolante $p_n(x)$ de f por las $n + 1$ abscisas equiespaciadas $\{\frac{i}{n}, i = 0, \dots, n\}$.



c) Sea $\{E_n\}_{n \geq 1}$ la sucesión de errores: $E_n = \max_{x \in [0,1]} |p_n(x) - f(x)|$. Estudiar acotación de $\{E_n\}_{n \geq 1}$.

d) Investigue si la familia de polinomios $\{p_n\}$ converge uniformemente a f en $[0, 1]$.

Recordatorio: decimos que $g_n : M \rightarrow \mathbb{R}^n$ converge uniformemente a $g : M \rightarrow \mathbb{R}^n$ si dado $\epsilon > 0$, $\exists n_0(\epsilon) :$

$n > n_0 \Rightarrow \|g_n(x) - g(x)\| < \epsilon, \forall x \in M$.

Sugerencia: estudiar el límite de la sucesión $\{E_n\}_{n \geq 1}$.

Problema 3 (30 pt.)

a) Deduzca el Método de Newton-Raphson (NR) para encontrar una raíz α de la ecuación $f(X) = \vec{0}$, con $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$.

b) Indique una condición suficiente para garantizar la convergencia del método anterior a una raíz α .



c) Sea $f(x, y) = (x + 2y^2 - 1, 1 - 4y)$. Partiendo de $X_0 = (0, 0)$, calcule X_1 aplicando NR.

d) Calcule la raíz exacta de $f(x, y) = 0$ y analice la convergencia de NR a dicha raíz. ¿Es $X = (0, 0)$ un punto de partida adecuado? Justifique.

1 Solución de ejercicio 1

- a) Ver teórico.
- b) Ver teórico.
- c) Como $D = I$, $r = \alpha = (0, 1, 1)^t$ y $Q = D - A$. (D es la matriz diagonal de A).
- d) Calculamos

$$Q^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

Por lo que tenemos que $Q^{2m} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4^m & 0 \\ 0 & 0 & 4^m \end{pmatrix}$, $\forall m > 0$. Tomando

$e^0 = (0, 1, 0)$ se consigue $e^{2m} = Q^{2m}e^0 = (0, 4^m, 0)$, que no converge al vector nulo.

- e) La matriz de Jacobi relajado es $Q_{JOR}(w) = wQ + (1 - w)I$. Si λ es valor propio de Q , entonces $\lambda' = w\lambda + 1 - w$ es valor propio de Q_{JOR} . Los valores propios de Q son 0, 2 y -2. Entonces, los valores propios de Q_{JOR} son $1 - w$, $1 + w$ y $1 - 3w$. El requisito $|1 + w| < 1$ implica $w < 0$, y el requisito $|1 - w| < 1$ implica $0 < w < 2$, por lo que no existe relajación convergente.

2 Solución de ejercicio 2

- a) Ver teórico.
- b) Queremos hallar el polinomio interpolante de $f(x) = e^x$, por las $n + 1$ abscisas equiespaciadas: $x_i = i/n$, $i = 0, \dots, n$. En la base de Lagrange:

$$p_n(x) = f(x_0)l_0(x) + \dots + f(x_n)l_n(x) = \sum_{i=0}^n f(x_i)l_i(x);$$

siendo l_i el polinomio i -ésimo de la base de Lagrange, definido como:

$$l_i(x) = \frac{\prod_{j=0, j \neq i}^n (x - x_j)}{\prod_{j=0, j \neq i}^n (x_i - x_j)}, \quad \forall i = 0, 1, \dots, n.$$

Usando esto, el polinomio interpolante por los $n + 1$ puntos es:

$$p_n(x) = \sum_{i=0}^n e^{i/n} \frac{\prod_{j=0, j \neq i}^n (x - j/n)}{\prod_{j=0, j \neq i}^n (i/n - j/n)}.$$

c) Por el Teorema del error de interpolación polinómica:

$$\forall x \in [0, 1], \exists \theta_x \in [0, 1] / |f(x) - p_n(x)| = \frac{|f^{(n+1)}(\theta_x)|}{(n+1)!} \prod_{i=1}^n |x - x_i|.$$

En este caso $f^{(n+1)}(x) = e^x$. Esta función es creciente, por lo que su valor máximo en el intervalo $[0, 1]$ se alcanza en $x = 1$:

$$|f^{(n+1)}(x)| = e^x \leq e^1, \forall x \in [0, 1].$$

Por otro lado: $|x - x_i| \leq 1, \forall x, x_i \in [0, 1]$. Por lo tanto:

$$|p_n(x) - f(x)| \leq \frac{e^1}{(n+1)!} 1^n = \frac{e}{(n+1)!}, \forall x \in [0, 1].$$

Tomando máximo de ambos lados, se obtiene:

$$E_n = \max_{x \in [0, 1]} |p_n(x) - f(x)| \leq \frac{e}{(n+1)!}.$$

d) En la parte anterior probamos que se cumple:

$$|p_n(x) - f(x)| \leq \frac{e}{(n+1)!}, \forall x \in [0, 1]. \quad (1)$$

Tomando límite a ambos lados de la desigualdad, se obtiene:

$$0 \leq \lim_{n \rightarrow \infty} |p_n(x) - f(x)| \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{e}{(n+1)!} = 0, \forall x \in [0, 1].$$

Esto prueba que la sucesión de polinomios interpolantes $\{p_n\}$, converge puntualmente a la función f , al aumentar la cantidad de puntos de interpolación. Para ver que la convergencia es uniforme, basta con notar que la cota de la Ecuación (1) no depende del punto $x \in [0, 1]$.

3 Solución de ejercicio 3

a) Ver teórico.

b) Newton-Rapshon es un MIG con $g(X) = X - \mathbb{J}_f(X)^{-1}f(X)$.

Las siguientes son tres condiciones suficientes para garantizar que X_k converge a α si X_0 está suficientemente cerca de α .

- g es una r-contracción en un entorno de α .
- g es diferenciable y existe una norma matricial y un número m tal que $\|\mathbb{J}_g(x, y)\| \leq m < 1$ para todo (x, y) en un entorno de α .
- $g \in \mathbb{C}^1$ y existe una norma matricial tal que $\|\mathbb{J}_g(\alpha)\| < 1$.

$X^{(0)}$	$X^{(1)}$
0	1
0	0.250

Tenemos $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ dada por $f(x, y) = (x + 2y^2 - 1, 1 - 4y)$ y se quiere hallar $\vec{\alpha} \in \mathbb{R}^2$ tal que $f(\vec{\alpha}) = \vec{0}$.

El método N-R puede escribirse como:

$$\begin{cases} X^{(k+1)} = X^{(k)} - \mathbb{J}_F(X^{(k)})^{-1}F(X^{(k)}) \\ X^{(0)} \in \mathbb{R}^n \end{cases}$$

Para evitar hallar la matriz inversa resolvemos el sistema $\mathbb{J}_f(X^{(k)})S^{(k)} = -f(X^{(k)})$, con lo que $X^{(k+1)} = X^{(k)} + S^{(k)}$. La matriz jacobiana en un punto genérico es

$$\mathbb{J}_f(x, y) = \begin{pmatrix} 1 & 4y \\ 0 & -4 \end{pmatrix}$$

Primero se halla $S^{(0)}$ resolviendo el sistema $\mathbb{J}_f(X^{(0)})S^{(0)} = -f(X^{(0)})$. Luego se calcula $X^{(1)} = X^{(0)} + S^{(0)}$.

$$\mathbb{J}_f(0, 0)S^{(0)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} S_1 \\ S_2 \\ S_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = -f(0, 0).$$

Resolviendo el sistema obtenemos $S^{(0)} = (1, 0.250)^t$, por tanto $X^{(1)} = (0, 0)^t + (1, \frac{1}{4})^t = (1, 0.250)^t$.

- d) Para $1 - 4y = 0$ debe ser $y = 0.250$, luego $x = 0.875$. La raíz exacta es entonces

$$\vec{\alpha} = \begin{pmatrix} 0.875 \\ 0.250 \end{pmatrix}$$

Para analizar la convergencia de NR a dicha raíz se considera:

$$g(X) = X - \mathbb{J}_f(X)^{-1} f(X) = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & y \\ 0 & -\frac{1}{4} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x + 2y^2 - 1 \\ 1 - 4y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2y^2 - y + 1 \\ \frac{1}{4} \end{pmatrix}$$

Luego se calcula

$$\mathbb{J}_g(X) = \begin{pmatrix} 0 & 4y - 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

y por tanto,

$$\mathbb{J}_g(\alpha) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

con lo cual se tiene $\|\mathbb{J}_g(\alpha)\| < 1$ para cualquier norma matricial, lo cual garantiza convergencia de NR a la raíz para todo X_0 suficientemente próximo.

Una buena elección para X_0 será un X_0 suficientemente cercano a α , de modo que se cumpla una condición suficiente de convergencia y tengamos la tranquilidad de que la sucesión X_k convergerá a α .

Para ver si $(0, 0)$ es una buena elección para X_0 , vemos si existe m y una norma matricial tal que $\|\mathbb{J}_g(0, 0)\| \leq m < 1$ (es claro que $g \in \mathbb{C}^1$).

Observar que el radio espectral de $\mathbb{J}_g(0, 0) = 1$, por lo que todas las normas operador de $\mathbb{J}_g(0, 0)$ serán mayores o iguales a 1.

Asimismo las normas $\|\mathbb{J}_g(0, 0)\|_2 = 1$, $\|\mathbb{J}_g(0, 0)\|_\infty = 1$, $\|\mathbb{J}_g(0, 0)\|_1 = 1$, por lo que $(0, 0)$ no es una buena elección para X_0 dado que no tenemos garantía de convergencia.

Una mejor elección para X_0 es por ejemplo $(0, y)$, $0 < y < \frac{m+1}{4} < \frac{1}{2}$.

Tomando $0 < m < 1$ tendremos que existe m y una norma matricial tal que $\|\mathbb{J}_g(x, y)\| \leq m < 1$ en un entorno de α , lo que garantiza convergencia