



Universidad de la República - Facultad de Ingeniería

Examen de Métodos Numéricos

23 de febrero de 2023

Duración: 3 horas

El repartido consta de 8 carillas impresas.

Nombre completo:
Cédula:
Número de lista:

- Observaciones:**
- Las hojas del repartido entregado deben mantenerse engrapadas durante toda la evaluación.
 - Todas las respuestas deben estar contenidas en el repartido entregado; no se aceptarán hojas adicionales.
 - Solamente se tomarán en cuenta las resoluciones de los problemas que se encuentren debajo de su correspondiente enunciado.
 - Solamente está permitido el uso de calculadoras estándar.
 - No está permitido el uso de material adicional.
 - La evaluación está basada en un esquema de 100 puntos, donde el puntaje mínimo para la aprobación es de 60.



Problema 1 (30 pt.)

Considere la ecuación diferencial

$$\begin{cases} y' = f(y, x) \\ y(0) = \alpha \end{cases}$$

a) Integre la ecuación anterior para obtener el método del trapecio.

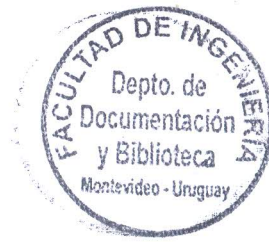
b) Defina estabilidad numérica y Problema Test.

c) Halle y grafique en el plano complejo la región de estabilidad del método del trapecio.

d) Para el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales, encuentre el paso $h \geq 0$ que garantiza la estabilidad numérica del método del trapecio.

$$Y' = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} Y$$

$$Y(0) = (1, 1)^t$$



Problema 2 (30 pt.)

Sea $\bar{p}(h)$ un estimador de cierto valor desconocido $p \in \mathbb{R}$, tal que:

$$\bar{p}(h) = p + a_k h^k + \sum_{i=k+1}^{\infty} a_i h^i, \quad \forall h > 0 \quad (\text{se asume } a_k \neq 0).$$

- a) Deduzca el estimador de Richardson $\hat{p}(h)$, a partir del estimador original $\bar{p}(h)$. Utilice pasos h y h/q , con $q > 1$ genérico.

- b) ¿Cuál es el orden del error de truncamiento del estimador de Richardson obtenido? Discuta en función de los coeficientes a_i .

- c) Sea $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, tal que $f \in C^\infty$. Se considera el siguiente estimador de la derivada segunda de f en un punto $a \in \mathbb{R}$:

$$T(h) = \frac{f(a+h) - 2f(a) + f(a-h)}{h^2}, \quad h > 0.$$

Supongamos que $f^{(4)}(a) \neq 0$. Pruebe que T tiene error de truncamiento de orden dos. Sugerencia: usar Taylor de orden cuatro.

- d) Obtenga el estimador de Richardson $\hat{T}$, asociado al estimador T . Utilice pasos h y h/q , con $q > 1$ genérico.



Problema 3 (40 pt.)

- a) Explique la resolución del problema de mínimos cuadrados no lineal a través del algoritmo de Gauss-Newton. Concluya presentando el pseudocódigo de ese algoritmo, explicando cada una de las líneas.

- b) Sea $A = \{(-1, 1), (2, 1), (1, 0)\}$ un conjunto de datos y $f(x) = \sin(\alpha x)e^{\beta x} + x$, donde α y β son los parámetros que se pretenden ajustar a través del algoritmo de Gauss-Newton. Sea $\hat{Q}_k$ la formulación del problema de mínimos cuadrados lineal que se resuelve en el k -ésimo paso de iteración del problema de mínimos cuadrados no lineal a través de Gauss-Newton para A y f .

$$\hat{Q}_k = \min \|Q_k\|_2^2$$

Calcule Q_k , que es la función objetivo del problema de mínimos cuadrados lineal que comprende el algoritmo de Gauss-Newton. Dejar la expresión como producto de vectores y/o matrices, sin necesidad de simplificar los productos, indicando explícitamente la dependencia de Q_k con α_{k+1} y β_{k+1} .



- c) Calcule α_1 y β_1 , tomando como valores iniciales $\alpha_0 = \frac{\pi}{2}$ y $\beta_0 = 0$ (escriba los resultados con tres decimales).

1. Solución de ejercicio 1

- a) Ver teórico.
- b) Ver teórico.
- c) Ver teórico.
- d) El sistema planteado puede reescribirse como

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2y_1 \\ -y_2 \end{pmatrix} \quad (1)$$

$$\begin{pmatrix} y_1(0) \\ y_2(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (2)$$

por lo que puede separarse en

$$\begin{cases} y_1' = 2y_1 \\ y_1(0) = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y_2' = -y_2 \\ y_2(0) = 1 \end{cases}$$

dos problemas de la forma del Problema Test, con $q_1 = 2$ y $q_2 = -1$ respectivamente.

Recordando que la región de estabilidad del método del trapecio es $R = \{z = hq \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}(z) \leq 0\}$, el único valor $h \geq 0$ que garantiza $\operatorname{Re}(hq_1) = 2h \leq 0$ y $\operatorname{Re}(hq_2) = -h \leq 0$ es $h = 0$.

2. Solución de ejercicio 2

- a) Por letra, la siguiente igualdad se cumple para todo $h > 0$:

$$\bar{p}(h) = p + a_k h^k + \sum_{i=k+1}^{\infty} a_i h^i$$

En particular se cumple para h/q , con $q > 1$ cualquiera:

$$\bar{p}(h/q) = p + a_k (h^k/q^k) + \sum_{i=k+1}^{\infty} a_i (h^i/q^i).$$

Por lo tanto:

$$q^k \bar{p}(h/q) - \bar{p}(h) = (q^k - 1)p + \sum_{i=k+1}^{\infty} a_i h^i \left((q^k/q^i) - 1 \right).$$

Dividiendo a ambos lados por $q^k - 1$, se obtiene el estimador de Richardson:

$$\hat{p}(h) := \frac{q^k \bar{p}(h/q) - \bar{p}(h)}{q^k - 1} = p + \sum_{i=k+1}^{\infty} a_i h^i \left(\frac{(q^k/q^i) - 1}{q^k - 1} \right).$$

- b) De la igualdad anterior, se deduce que el estimador de Richardson tiene error de truncamiento de orden $i \geq k + 1$; donde i es el menor índice tal que $a_i \neq 0$. En particular es de orden $k + 1$ si $a_{k+1} \neq 0$.
- c) Taylor de orden cuatro en el punto a :

$$f(a + h) = f(a) + f'(a)h + f''(a)\frac{h^2}{2} + f^{(3)}(a)\frac{h^3}{3!} + f^{(4)}(a)\frac{h^4}{4!} + O(h^5).$$

La igualdad vale para cualquier $h \in \mathbb{R}$. Evaluando en $-h$, se obtiene:

$$f(a - h) = f(a) - f'(a)h + f''(a)\frac{h^2}{2} - f^{(3)}(a)\frac{h^3}{3!} + f^{(4)}(a)\frac{h^4}{4!} + \hat{O}(h^5).$$

Sumando ambas ecuaciones:

$$f(a + h) + f(a - h) = 2f(a) + f''(a)h^2 + 2f^{(4)}(a)\frac{h^4}{4!} + \left(O(h^5) + \hat{O}(h^5) \right).$$

Despejando la derivada segunda:

$$\frac{f(a + h) + f(a - h) - 2f(a)}{h^2} = f''(a) + 2f^{(4)}(a)\frac{h^2}{4!} + O(h^3).$$

Si $f^{(4)}(a) \neq 0$, el estimador tiene error de truncamiento de orden dos. De lo contrario el orden es mayor a dos.

- d) Como T es un estimador de orden $k = 2$, el estimador de Richardson asociado a T , es (para $q > 1$):

$$\begin{aligned} \hat{T}(h) &= \frac{q^2 T(h/q) - T(h)}{q^2 - 1} = \\ &= \frac{1}{q^2 - 1} \left(q^2 \frac{f(a + h/q) - 2f(a) + f(a - h/q)}{h^2} - \frac{f(a + h) - 2f(a) + f(a - h)}{h^2} \right). \end{aligned}$$

3. Solución de ejercicio 3

- a) Ver teórico.
- b) $Q_k = R(\alpha_k, \beta_k) + \mathbb{J}_R(\alpha_k, \beta_k) [(\alpha_{k+1}, \beta_{k+1}) - (\alpha_k, \beta_k)]^T$, donde R es el residuo entre el modelo $f(x_i)$ y los valores de y_i , para los elementos i del conjunto A . Por lo tanto:

$$R(\alpha_k, \beta_k) = \begin{pmatrix} \sin(-\alpha_k)e^{-\beta_k} - 1 \\ \sin(2\alpha_k)e^{2\beta_k} + 2 \\ \sin(\alpha_k)e^{\beta_k} + 1 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\mathbb{J}_R(\alpha_k, \beta_k) = \begin{pmatrix} -\cos(-\alpha_k)e^{-\beta_k} & -\sin(-\alpha_k)e^{-\beta_k} \\ 2\cos(2\alpha_k)e^{2\beta_k} & 2\sin(2\alpha_k)e^{2\beta_k} \\ \cos(\alpha_k)e^{\beta_k} & \sin(\alpha_k)e^{\beta_k} \end{pmatrix}$$

Por lo tanto, se tiene la siguiente expresión de Q_k

$$Q_k = \begin{pmatrix} \sin(-\alpha_k)e^{-\beta_k} - 1 \\ \sin(2\alpha_k)e^{2\beta_k} + 2 \\ \sin(\alpha_k)e^{\beta_k} + 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\cos(-\alpha_k)e^{-\beta_k} & -\sin(-\alpha_k)e^{-\beta_k} \\ 2\cos(2\alpha_k)e^{2\beta_k} & 2\sin(2\alpha_k)e^{2\beta_k} \\ \cos(\alpha_k)e^{\beta_k} & \sin(\alpha_k)e^{\beta_k} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_{k+1} - \alpha_k \\ \beta_{k+1} - \beta_k \end{pmatrix}$$

- c) De la parte anterior tenemos que $Q_0 = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} P_0$,

donde $P_0 = [(\alpha_{k+1}, \beta_{k+1}) - (\alpha_k, \beta_k)]^T$. Se tiene entonces la siguiente formulación del problema de mínimos cuadrados lineal.

$$\hat{Q}_0 = \min_{P_0 \in \mathbb{R}^2} \|Q_0\|_2^2 = \min_{P_0 \in \mathbb{R}^2} \left\| \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} P_0 \right\|_2^2 =$$

$$\min_{P_0 \in \mathbb{R}^2} \|AP_0 - b\|_2^2.$$

Utilizando las Ecuaciones Normales para resolver el problema de mínimos cuadrados lineal, tenemos que $P_0 = (A^T A)^{-1} A^T b = (-\frac{3}{4}, 3)^T$.

1. Solución de ejercicio 1

- a) Ver teórico.
- b) Ver teórico.
- c) Ver teórico.
- d) El sistema planteado puede reescribirse como

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2y_1 \\ -y_2 \end{pmatrix} \quad (1)$$

$$\begin{pmatrix} y_1(0) \\ y_2(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (2)$$

por lo que puede separarse en

$$\begin{cases} y_1' = 2y_1 \\ y_1(0) = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y_2' = -y_2 \\ y_2(0) = 1 \end{cases}$$

dos problemas de la forma del Problema Test, con $q_1 = 2$ y $q_2 = -1$ respectivamente.

Recordando que la región de estabilidad del método del trapecio es $R = \{z = hq \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}(z) \leq 0\}$, el único valor $h \geq 0$ que garantiza $\operatorname{Re}(hq_1) = 2h \leq 0$ y $\operatorname{Re}(hq_2) = -h \leq 0$ es $h = 0$.

2. Solución de ejercicio 2

- a) Por letra, la siguiente igualdad se cumple para todo $h > 0$:

$$\bar{p}(h) = p + a_k h^k + \sum_{i=k+1}^{\infty} a_i h^i$$

En particular se cumple para h/q , con $q > 1$ cualquiera:

$$\bar{p}(h/q) = p + a_k (h^k/q^k) + \sum_{i=k+1}^{\infty} a_i (h^i/q^i).$$

Por lo tanto:

$$q^k \bar{p}(h/q) - \bar{p}(h) = (q^k - 1)p + \sum_{i=k+1}^{\infty} a_i h^i \left((q^k/q^i) - 1 \right).$$

Dividiendo a ambos lados por $q^k - 1$, se obtiene el estimador de Richardson:

$$\hat{p}(h) := \frac{q^k \bar{p}(h/q) - \bar{p}(h)}{q^k - 1} = p + \sum_{i=k+1}^{\infty} a_i h^i \left(\frac{(q^k/q^i) - 1}{q^k - 1} \right).$$

- b) De la igualdad anterior, se deduce que el estimador de Richardson tiene error de truncamiento de orden $i \geq k + 1$; donde i es el menor índice tal que $a_i \neq 0$. En particular es de orden $k + 1$ si $a_{k+1} \neq 0$.
- c) Taylor de orden cuatro en el punto a :

$$f(a + h) = f(a) + f'(a)h + f''(a)\frac{h^2}{2} + f^{(3)}(a)\frac{h^3}{3!} + f^{(4)}(a)\frac{h^4}{4!} + O(h^5).$$

La igualdad vale para cualquier $h \in \mathbb{R}$. Evaluando en $-h$, se obtiene:

$$f(a - h) = f(a) - f'(a)h + f''(a)\frac{h^2}{2} - f^{(3)}(a)\frac{h^3}{3!} + f^{(4)}(a)\frac{h^4}{4!} + \hat{O}(h^5).$$

Sumando ambas ecuaciones:

$$f(a + h) + f(a - h) = 2f(a) + f''(a)h^2 + 2f^{(4)}(a)\frac{h^4}{4!} + \left(O(h^5) + \hat{O}(h^5) \right).$$

Despejando la derivada segunda:

$$\frac{f(a + h) + f(a - h) - 2f(a)}{h^2} = f''(a) + 2f^{(4)}(a)\frac{h^2}{4!} + O(h^3).$$

Si $f^{(4)}(a) \neq 0$, el estimador tiene error de truncamiento de orden dos. De lo contrario el orden es mayor a dos.

- d) Como T es un estimador de orden $k = 2$, el estimador de Richardson asociado a T , es (para $q > 1$):

$$\begin{aligned} \hat{T}(h) &= \frac{q^2 T(h/q) - T(h)}{q^2 - 1} = \\ &= \frac{1}{q^2 - 1} \left(q^2 \frac{f(a + h/q) - 2f(a) + f(a - h/q)}{h^2} - \frac{f(a + h) - 2f(a) + f(a - h)}{h^2} \right). \end{aligned}$$

3. Solución de ejercicio 3

- a) Ver teórico.
- b) $Q_k = R(\alpha_k, \beta_k) + \mathbb{J}_R(\alpha_k, \beta_k) [(\alpha_{k+1}, \beta_{k+1}) - (\alpha_k, \beta_k)]^T$, donde R es el residuo entre el modelo $f(x_i)$ y los valores de y_i , para los elementos i del conjunto A . Por lo tanto:

$$R(\alpha_k, \beta_k) = \begin{pmatrix} \sin(-\alpha_k)e^{-\beta_k} - 1 \\ \sin(2\alpha_k)e^{2\beta_k} + 2 \\ \sin(\alpha_k)e^{\beta_k} + 1 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\mathbb{J}_R(\alpha_k, \beta_k) = \begin{pmatrix} -\cos(-\alpha_k)e^{-\beta_k} & -\sin(-\alpha_k)e^{-\beta_k} \\ 2\cos(2\alpha_k)e^{2\beta_k} & 2\sin(2\alpha_k)e^{2\beta_k} \\ \cos(\alpha_k)e^{\beta_k} & \sin(\alpha_k)e^{\beta_k} \end{pmatrix}$$

Por lo tanto, se tiene la siguiente expresión de Q_k

$$Q_k = \begin{pmatrix} \sin(-\alpha_k)e^{-\beta_k} - 1 \\ \sin(2\alpha_k)e^{2\beta_k} + 2 \\ \sin(\alpha_k)e^{\beta_k} + 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\cos(-\alpha_k)e^{-\beta_k} & -\sin(-\alpha_k)e^{-\beta_k} \\ 2\cos(2\alpha_k)e^{2\beta_k} & 2\sin(2\alpha_k)e^{2\beta_k} \\ \cos(\alpha_k)e^{\beta_k} & \sin(\alpha_k)e^{\beta_k} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_{k+1} - \alpha_k \\ \beta_{k+1} - \beta_k \end{pmatrix}$$

- c) De la parte anterior tenemos que $Q_0 = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} P_0$,

donde $P_0 = [(\alpha_{k+1}, \beta_{k+1}) - (\alpha_k, \beta_k)]^T$. Se tiene entonces la siguiente formulación del problema de mínimos cuadrados lineal.

$$\hat{Q}_0 = \min_{P_0 \in \mathbb{R}^2} \|Q_0\|_2^2 = \min_{P_0 \in \mathbb{R}^2} \left\| \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} P_0 \right\|_2^2 =$$

$$\min_{P_0 \in \mathbb{R}^2} \|AP_0 - b\|_2^2.$$

Utilizando las Ecuaciones Normales para resolver el problema de mínimos cuadrados lineal, tenemos que $P_0 = (A^T A)^{-1} A^T b = \left(-\frac{3}{4}, 3\right)^T$.