



Examen - Matemática Discreta I

Martes 26 de julio de 2022

Número de lista	APELLIDO, Nombre	Cédula de identidad

MO1	MO2	MO3	MO4	MO5	Desarrollo	Puntaje Total

Cada respuesta correcta de múltiple opción suma 8 puntos. Incorrectas restan 2 puntos.
Se deben elegir y resolver 2 ejercicios de desarrollo. Cada ejercicio correcto vale 30 puntos.
El examen se aprueba con un mínimo de 60 puntos.
La duración del examen es de tres horas y media.

Múltiple Opción 1

¿Cuántas maneras hay de poner 10 bolitas idénticas en 6 cajas diferentes, de modo que cada caja tenga al menos una bolita y no más de 3? A) 60; B) 70; C) 80; D) 90.

Múltiple Opción 2

¿Cuántos subconjuntos de tres elementos de $\{1, \dots, 100\}$ cumplen que alguno de sus elementos es el promedio de los dos restantes? A) $\binom{100}{2}$; B) $2 \times \binom{100}{2}$; C) $\binom{50}{2}$; D) $2 \times \binom{50}{2}$.

Múltiple Opción 3

¿Cuántas relaciones de orden parcial se pueden definir sobre $\{a, b, c\}$?
A) 5; B) 12; C) 19; D) 25.

Múltiple Opción 4

Calcular la cantidad de palabras que se pueden formar usando todas las letras de la palabra *TERRATENIENTE* que cumplen simultáneamente las siguientes condiciones:

- Contienen el patrón *RR*, y
- Contienen a todas las vocales *E* en su lugar original.

A) $\frac{8!}{3! \times 2!}$; B) $\frac{12!}{4! \times 3! \times 2!}$; C) $5 \times \frac{7!}{3! \times 2!}$; D) $2 \times 8!$.

Múltiple Opción 5

Calcular a_{100} sabiendo que $a_{n+1} - 2a_n = 2^n$ y $a_0 = 0$.

A) $a_{100} = 100 \times 2^{100}$; B) $a_{100} = 100 \times 2^{99}$; C) $a_{100} = 2^{100}$; D) $a_{100} = 2^{99}$.

Ejercicios de Desarrollo

- (1) Probar que si un grafo simple G no es conexo entonces su complemento $\overline{G}$ sí lo es.
- (2) Probar que todo grafo simple con 2 o más vértices tiene al menos dos vértices con el mismo grado.
Sugerencia: probar primero el enunciado cuando el grafo es conexo.
- (3) Calcular el polinomio cromático del grafo bipartito completo $K_{2,3}$.

1/6.



Examen - Matemática Discreta I

Martes 26 de julio de 2022.

Número de lista	APELLIDO, Nombre	Cédula de identidad

MO1	MO2	MO3	MO4	MO5	Desarrollo	Puntaje Total

Cada respuesta correcta de múltiple opción suma 8 puntos. Incorrectas restan 2 puntos. Se deben elegir y resolver 2 ejercicios de desarrollo. Cada ejercicio correcto vale 30 puntos. El examen se aprueba con un mínimo de 60 puntos. La duración del examen es de tres horas y media.

Múltiple Opción 1

Calcular a_{100} sabiendo que $a_{n+1} - 2a_n = 2^n$ y $a_0 = 0$.

A) $a_{100} = 100 \times 2^{100}$; B) $a_{100} = 100 \times 2^{99}$; C) $a_{100} = 2^{100}$; D) $a_{100} = 2^{99}$.

Múltiple Opción 2

Calcular la cantidad de palabras que se pueden formar usando todas las letras de la palabra *TERRATENIENTE* que cumplen simultáneamente las siguientes condiciones:

- Contienen el patrón *RR*, y
- Contienen a todas las vocales *E* en su lugar original.

A) $\frac{8!}{3! \times 2!}$; B) $\frac{12!}{4! \times 3! \times 2!}$; C) $5 \times \frac{7!}{3! \times 2!}$; D) $2 \times 8!$.

Múltiple Opción 3

¿Cuántas relaciones de orden parcial se pueden definir sobre $\{a, b, c\}$?

A) 5; B) 12; C) 19; D) 25.

Múltiple Opción 4

¿Cuántos subconjuntos de tres elementos de $\{1, \dots, 100\}$ cumplen que alguno de sus elementos es el promedio de los dos restantes? A) $\binom{100}{2}$; B) $2 \times \binom{100}{2}$; C) $\binom{50}{2}$; D) $2 \times \binom{50}{2}$.

Múltiple Opción 5

¿Cuántas maneras hay de poner 10 bolitas idénticas en 6 cajas diferentes, de modo que cada caja tenga al menos una bolita y no más de 3? A) 60; B) 70; C) 80; D) 90.

Ejercicios de Desarrollo

- (1) Probar que si un grafo simple G no es conexo entonces su complemento $\overline{G}$ sí lo es.
- (2) Probar que todo grafo simple con 2 o más vértices tiene al menos dos vértices con el mismo grado.
Sugerencia: probar primero el enunciado cuando el grafo es conexo.
- (3) Calcular el polinomio cromático del grafo bipartito completo $K_{2,3}$.

2/6

Solución del Examen - MD I

VERSIÓN 1

Martes 26 de julio de 2022

MO1	MO2	MO3	MO4	MO5
D	D	C	C	B

Múltiple Opción 1

Si x_i denota la cantidad de bolitas dentro de la caja i , debemos contar soluciones naturales de la ecuación $x_1 + \dots + x_6 = 10$ sujeto a que $1 \leq x_i \leq 3$ para cada $i \in \{1, \dots, 6\}$. Tomando un cambio de variables $y_i = x_i - 1$, podemos contar equivalentemente la cantidad de soluciones naturales de $y_1 + \dots + y_6 = 4$ sujeto a que se deben cumplir las desigualdades $y_i \leq 2$ para cada $i \in \{1, \dots, 6\}$. Para efectuar tal conteo podemos utilizar el Principio de Inclusión y Exclusión considerando el universo cuyos elementos son todas las soluciones naturales de $y_1 + \dots + y_6 = 4$ y las condiciones $c_i : y_i \geq 3$ para cada $i \in \{1, \dots, 6\}$. Notando que se pueden cumplir 0 o bien 1 de las condiciones, tenemos que:

$$n(\overline{c_1}, \dots, \overline{c_6}) = CR_6^4 - \binom{6}{1} CR_1^6 = \binom{9}{4} - 6 \binom{6}{1} \binom{6}{1} = 90,$$

por lo que la respuesta correcta es la D.

Múltiple Opción 2

Se pide contar las ternas $\{a, b, c\}$ tales que $1 \leq a < b < c \leq 100$ y $(a + b + c)/3 = b$, o equivalentemente $a + c = 2b$. Como $a < b < c$ debemos tener $a = b - i$ y $c = b + i$ para cierto entero positivo i . Luego debemos contar ternas de la forma $\{k - i, k, k + i\}$ donde tanto i como k son enteros positivos que cumplen $1 \leq k - i$ y $k + i \leq 100$.

Para cada elección de k dentro del conjunto $\{1, \dots, 50\}$ hay $k - 1$ posibles opciones para i . Análogamente, para cada elección de k dentro del conjunto $\{51, \dots, 100\}$ hay $100 - k$ posibles opciones para i . Por la regla de la suma la cantidad solicitada, que llamamos N , vale:

$$N = \sum_{k=1}^{50} (k - 1) + \sum_{k=51}^{100} (100 - k) = 2 \sum_{k=1}^{50} (k - 1) = 2 \binom{50}{2},$$

y la opción correcta es la D.

Múltiple Opción 3

Para contar todas las relaciones de orden parcial con 3 elementos, llamemos α a la cadena de tamaño máximo. Notemos que $\alpha \in \{1, 2, 3\}$:

- Si $\alpha = 1$, los tres elementos están aislados, y hay 1 solo orden parcial posible.
- Si $\alpha = 2$, tenemos 3 relaciones que consisten en un elemento minimal y dos maximales relacionados con el primero, 3 relaciones que consisten en un elemento maximal y dos minimales relacionados con el primero, o bien $\binom{3}{2} \times 2 = 6$ relaciones que consisten en una cadena de tamaño 2 y un tercer elemento no relacionado con los otros dos. Luego, hay $3 + 3 + 6 = 15$ relaciones de orden parcial que tienen tamaño máximo de cadena $\alpha = 2$.
- Si $\alpha = 3$ hay $3! = 6$ relaciones que consisten en una única cadena de tamaño 3.

Por la regla de la suma, tenemos en total $1 + 15 + 3 = 19$ relaciones de orden parcial posibles con 3 elementos, y la opción correcta es la C.

3/6

Múltiple Opción 4

Como las E se deben ubicar en su lugar original, la palabra es de la forma $.E_E_E_E$. Notar que hay 5 ubicaciones posibles del digrama RR y, una vez ubicado el digrama, hay $PR_{3,2,1,1}^7 = 7!/(3! \times 2! \times 1! \times 1!)$ maneras de ubicar las restantes letras con sus repeticiones (tres T , dos N , una A y una I). Entonces, hay en total $5 \times 7!/(3! \times 2!)$ palabras posibles que cumplen lo pedido, y la opción correcta es la C .

Múltiple Opción 5

Para resolver el problema homogéneo $a_{n+1} - 2a_n = 0$, hallamos las raíces del polinomio característico $p(x) = x - 2$, que es $x = 2$. Luego, la solución al problema homogéneo es $k2^n$, siendo k una constante cualquiera.

Para encontrar una solución particular a nuestra recurrencia $a_{n+1} - 2a_n = 2^n$ notemos que al ser 2 raíz del polinomio característico vamos a encontrar una solución particular con la forma $cn2^n$, siendo c una constante a determinar. Reemplazando, tenemos que $c(n+1)2^{n+1} - 2cn2^n = 2^n$, y cancelando en ambos miembros el factor común 2^n resulta que $2c(n+1) - 2cn = 1$, por lo que $c = 1/2$.

Tenemos entonces que la solución general a nuestro problema es $a_n = k2^n + n2^{n-1}$, considerando el hecho que $a_0 = 0$ tenemos que $k = 0$, por lo que $a_n = n2^{n-1}$ y $a_{100} = 100 \times 2^{99}$. Luego, la respuesta correcta es la B .

Ejercicios de Desarrollo

- (1) Sea G un grafo no conexo simple cualquiera, y sea G_1 una componente conexa de G . Observemos que el grafo complemento $\overline{G}$ tiene como subgrafo al grafo bipartito completo que tiene los vértices de $V(G_1)$ en una parte y los vértices de $V(G - G_1)$ en otra parte. Como $\overline{G}$ tiene un subgrafo conexo que es recubridor, es necesariamente conexo, como queríamos demostrar.
- (2) Vamos a probar que todo grafo simple con 2 o más vértices tiene al menos dos vértices con el mismo grado. De hecho, si el grafo es simple conexo y tiene n vértices entonces los grados de sus vértices varían entre 1 y $n-1$. Por el Principio del Palomar (siendo los n vértices las palomas y sus correspondientes grados los nidos), necesariamente existen al menos dos vértices con el mismo grado.

Supongamos ahora que G no es conexo. Como tiene al menos 2 vértices, si el grafo G consiste únicamente de vértices aislados entonces tiene al menos 2 vértices aislados. En tal caso, existen al menos 2 vértices con el mismo grado igual a 0. En caso contrario tendremos alguna componente conexa con 2 vértices o más, y el anterior razonamiento para grafos conexos aplica, encontrando nuevamente al menos 2 vértices con el mismo grado, como queríamos demostrar.

- (3) Para calcular el polinomio cromático del grafo $K_{2,3}$ procedemos aplicando la regla de arista contracción y sustracción agregando una arista entre los vértices no adyacentes de grado 3. Entonces:

$$\begin{aligned} p_{K_{2,3}}(x) &= \frac{p_{K_3}(x)^3}{p_{K_2}(x)^2} + p_{K_{1,3}}(x) \\ &= x(x-1)(x-2)^3 + x(x-1)^3 \\ &= x(x-1)[x^3 - 6x^2 + 12x - 8 + x^2 - 2x + 1] \\ &= x(x-1)(x^3 - 5x^2 + 10x - 7) \end{aligned}$$

Notar que $p_{K_{2,3}}(2) = 2$, lo que es correcto pues $K_{2,3}$ es bipartito y al elegir un color para una parte tenemos necesariamente que usar el segundo color para la segunda parte, habiendo 2 coloraciones propias posibles.

4/6



Solución del Examen - MD I

VERSIÓN 2

Martes 26 de julio de 2022



MO1	MO2	MO3	MO4	MO5
B	C	C	D	D

Múltiple Opción 1

Para resolver el problema homogéneo $a_{n+1} - 2a_n = 0$, hallamos las raíces del polinomio característico $p(x) = x - 2$, que es $x = 2$. Luego, la solución al problema homogéneo es $k2^n$, siendo k una constante cualquiera.

Para encontrar una solución particular a nuestra recurrencia $a_{n+1} - 2a_n = 2^n$ notemos que al ser 2 raíz del polinomio característico vamos a encontrar una solución particular con la forma $cn2^n$, siendo c una constante a determinar. Reemplazando, tenemos que $c(n+1)2^{n+1} - 2cn2^n = 2^n$, y cancelando en ambos miembros el factor común 2^n resulta que $2c(n+1) - 2cn = 1$, por lo que $c = 1/2$.

Tenemos entonces que la solución general a nuestro problema es $a_n = k2^n + n2^{n-1}$, y considerando el hecho que $a_0 = 0$ tenemos que $k = 0$, por lo que $a_n = n2^{n-1}$ y $a_{100} = 100 \times 2^{99}$. Luego, la respuesta correcta es la B.

Múltiple Opción 2

Como las E se deben ubicar en su lugar original, la palabra es de la forma E___E___E___E_. Notar que hay 5 ubicaciones posibles del digrama RR y, una vez ubicado el digrama, hay $PR_{3,2,1,1}^7 = 7!/(3! \times 2! \times 1! \times 1!)$ maneras de ubicar las restantes letras con sus repeticiones (tres T, dos N, una A y una I). Entonces, hay en total $5 \times 7!/(3! \times 2!)$ palabras posibles que cumplen lo pedido, y la opción correcta es la C.

Múltiple Opción 3

Para contar todas las relaciones de orden parcial con 3 elementos, llamemos α a la cadena de tamaño máximo. Notemos que $\alpha \in \{1, 2, 3\}$:

- Si $\alpha = 1$, los tres elementos están aislados, y hay 1 solo orden parcial posible.
- Si $\alpha = 2$, tenemos 3 relaciones que consisten en un elemento minimal y dos maximales relacionados con el primero, 3 relaciones que consisten en un elemento maximal y dos minimales relacionados con el primero, o bien $\binom{3}{2} \times 2 = 6$ relaciones que consisten en una cadena de tamaño 2 y un tercer elemento no relacionado con los otros dos. Luego, hay $3 + 3 + 6 = 15$ relaciones de orden parcial que tienen tamaño máximo de cadena $\alpha = 2$.
- Si $\alpha = 3$ hay $3! = 6$ relaciones que consisten en una única cadena de tamaño 3.

Por la regla de la suma, tenemos en total $1 + 15 + 6 = 22$ relaciones de orden parcial posibles con 3 elementos, y la opción correcta es la C.

Múltiple Opción 4

Se pide contar las ternas $\{a, b, c\}$ tales que $1 \leq a < b < c \leq 100$ y $(a + b + c)/3 = b$, o equivalentemente $a + c = 2b$. Como $a < b < c$ debemos tener $a = b - i$ y $c = b + i$ para cierto entero positivo i . Luego debemos contar ternas de la forma $\{k - i, k, k + i\}$ donde tanto i como k son enteros positivos que cumplen $1 \leq k - i$ y $k + i \leq 100$.

5/6.

Para cada elección de k dentro del conjunto $\{1, \dots, 50\}$ hay $k-1$ posibles opciones para i . Análogamente, para cada elección de k dentro del conjunto $\{51, \dots, 100\}$ hay $100-k$ posibles opciones para i . Por la regla de la suma la cantidad solicitada, que llamamos N , vale:

$$N = \sum_{k=1}^{50} (k-1) + \sum_{k=51}^{100} (100-k) = 2 \sum_{k=1}^{50} (k-1) = 2 \binom{50}{2},$$

y la opción correcta es la D .

Múltiple Opción 5

Si x_i denota la cantidad de bolitas dentro de la caja i , debemos contar soluciones naturales de la ecuación $x_1 + \dots + x_6 = 10$ sujeto a que $1 \leq x_i \leq 3$ para cada $i \in \{1, \dots, 6\}$. Tomando un cambio de variables $y_i = x_i - 1$, podemos contar equivalentemente la cantidad de soluciones naturales de $y_1 + \dots + y_6 = 4$ sujeto a que se deben cumplir las desigualdades $y_i \leq 2$ para cada $i \in \{1, \dots, 6\}$. Para efectuar tal conteo podemos utilizar el Principio de Inclusión y Exclusión considerando el universo cuyos elementos son todas las soluciones naturales de $y_1 + \dots + y_6 = 4$ y las condiciones $c_i : y_i \geq 3$ para cada $i \in \{1, \dots, 6\}$. Notando que se pueden cumplir 0 o bien 1 de las condiciones, tenemos que:

$$n(\overline{c_1}, \dots, \overline{c_6}) = CR_6^4 - \binom{6}{1} CR_1^6 = \binom{9}{4} - 6 \binom{6}{1} \binom{6}{1} = 90,$$

por lo que la respuesta correcta es la D .

Ejercicios de Desarrollo

- (1) Sea G un grafo no conexo simple cualquiera, y sea G_1 una componente conexa de G . Observemos que el grafo complemento $\overline{G}$ tiene como subgrafo al grafo bipartito completo que tiene los vértices de $V(G_1)$ en una parte y los vértices de $V(G - G_1)$ en otra parte. Como $\overline{G}$ tiene un subgrafo conexo que es recubridor, es necesariamente conexo, como queríamos demostrar.

- (2) Vamos a probar que todo grafo simple con 2 o más vértices tiene al menos dos vértices con el mismo grado. De hecho, si el grafo es simple conexo y tiene n vértices entonces los grados de sus vértices varían entre 1 y $n-1$. Por el Principio del Palomar (siendo los n vértices las palomas y sus correspondientes grados los nidos), necesariamente existen al menos dos vértices con el mismo grado.

Supongamos ahora que G no es conexo. Como tiene al menos 2 vértices, si el grafo G consiste únicamente de vértices aislados entonces tiene al menos 2 vértices aislados. En tal caso, existen al menos 2 vértices con el mismo grado igual a 0. En caso contrario tendremos alguna componente conexa con 2 vértices o más, y el anterior razonamiento para grafos conexos aplica, encontrando nuevamente al menos 2 vértices con el mismo grado, como queríamos demostrar.

- (3) Para calcular el polinomio cromático del grafo $K_{2,3}$ procedemos aplicando la regla de arista contracción y sustracción agregando una arista entre los vértices no adyacentes de grado 3. Entonces:

$$\begin{aligned} p_{K_{2,3}}(x) &= \frac{p_{K_3}(x)^3}{p_{K_2}(x)^2} + p_{K_{1,3}}(x) \\ &= x(x-1)(x-2)^3 + x(x-1)^3 \\ &= x(x-1)[x^3 - 6x^2 + 12x - 8 + x^2 - 2x + 1] \\ &= x(x-1)(x^3 - 5x^2 + 10x - 7) \end{aligned}$$

Notar que $p_{K_{2,3}}(2) = 2$, lo que es correcto pues $K_{2,3}$ es bipartito y al elegir un color para una parte tenemos necesariamente que usar el segundo color para la segunda parte, habiendo 2 coloraciones propias posibles.

6/6

