

Tecnólogo Industrial Mecánico
 Examen - Matemática II
 16 de Diciembre de 2021

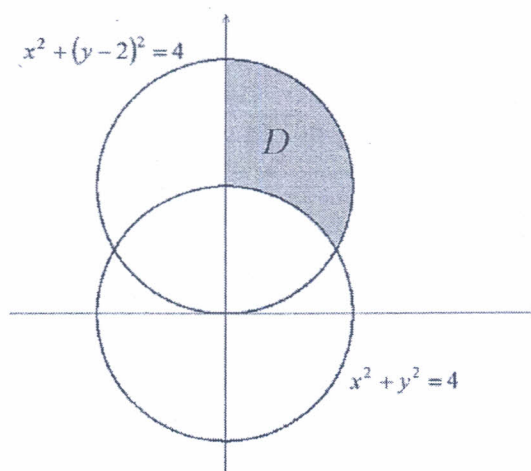
Nombre	Apellidos	Cédula
--------	-----------	--------

escriba en letra de imprenta legible

Ejercicio 1 (20 puntos) Calcular las siguientes primitivas

(a) $\int \frac{1}{(x+1)\sqrt{x}} dx$ (b) $\int \frac{\ln x}{x^3} dx$

Ejercicio 2 (30 puntos) Calcular el área de la región D de la figura



Ejercicio 3 (25 puntos) Resolver

(E) $y'' + y = 3 \sin x \cos x$

Ejercicio 4 (25 puntos) Hallar los extremos relativos de la función

$f : f(x, y) = x^4 + y^4 + 2x^2y^2 - 2x^2 + 2$

Para uso del profesor:

1 a)	1 b)	2 a)	2 b)	3	4

Total

1 de 4



Examen- Matemática II
16 de Diciembre de 2021
SOLUCIONES

Ejercicio 1 a)

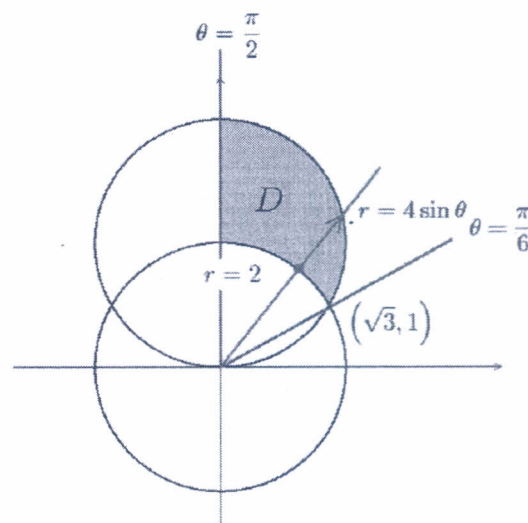
$$\begin{aligned} \int \frac{1}{(x+1)\sqrt{x}} dx &= 2 \int \frac{1}{u^2+1} du & \text{c.v.} \begin{cases} u = \sqrt{x} \Leftrightarrow x = u^2 \\ dx = 2u du \end{cases} \\ &= 2 \arctan(u) + k \\ &= 2 \arctan(\sqrt{x}) + k \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned} \int \frac{\ln x}{x^3} dx &= \frac{-1}{2x^2} \ln x + \int \frac{1}{2x^3} dx & \left(\begin{cases} u = \ln x \rightarrow u' = \frac{1}{x} \\ v' = \frac{1}{x^3} \rightarrow v = \frac{-1}{2x^2} \end{cases} \right) : \\ &= \frac{-1}{2x^2} \ln x - \frac{1}{4x^2} + k \end{aligned}$$

Ejercicio 2 Usamos coordenadas polares

$$\begin{aligned} \begin{cases} x^2 + (y-2)^2 = 4 \\ x^2 + y^2 = 4 \end{cases} &\Leftrightarrow x = -\sqrt{3}, y = 1, \quad x = \sqrt{3}, y = 1 \\ x^2 + y^2 = 4 &\Leftrightarrow r^2 = 4 \Leftrightarrow r = 2 \\ x^2 + (y-2)^2 = 4 &\Leftrightarrow x^2 + y^2 - 4y = 0 \Leftrightarrow r^2 - 4r \sin \theta = 0 \\ &\Leftrightarrow r(r - 4 \sin \theta) = 0 \Leftrightarrow r = 4 \sin \theta \quad (r > 0) \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} \text{Area}(D) &= \iint_D 1 dx dy = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_2^{4 \sin \theta} r dr \right) d\theta = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{r^2}{2} \Big|_2^{4 \sin \theta} \right) d\theta = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} (8 \sin^2 \theta - 2) d\theta = \\ &= \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \left(8 \left(\frac{1 - \cos 2\theta}{2} \right) - 2 \right) d\theta = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} (2 - 4 \cos 2\theta) d\theta = 2\theta - 2 \sin 2\theta \Big|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \\ &= (\pi - 2 \sin \pi) - \left(\frac{\pi}{3} - 2 \sin \frac{\pi}{3} \right) = \frac{2}{3} \pi + \sqrt{3} \end{aligned}$$

Ejercicio 3 Ecuación homogénea

$$(H) \quad y'' + y = 0$$

La ecuación característica es

$$\lambda^2 + 1 = 0 \Leftrightarrow \lambda = \pm i$$

2 de 4



y por lo tanto la solución general de homogénea es

$$y_H = c_1 \cos x + c_2 \sin x$$

Ecuación no homogénea

$$(E) \quad y'' + y = 3 \sin x \cos x$$

Busquemos una solución particular de la forma

$$y_p = c_1(x) \cos x + c_2(x) \sin x$$

con el método de variación de parámetros

$$\begin{aligned} c_1'(x) &= \frac{\begin{vmatrix} 0 & \sin x \\ 3 \sin x \cos x & \cos x \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \cos x & \sin x \\ -\sin x & \cos x \end{vmatrix}} = \frac{-3 \sin^2 x \cos x}{\cos^2 x + \sin^2 x} = -3 \sin^2 x \cos x \\ \Rightarrow c_1(x) &= -3 \int \sin^2 x \cos x dx = -3 \int u^2 du = -u^3 = -\sin^3 x \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} c_2'(x) &= \frac{\begin{vmatrix} \cos x & 0 \\ -\sin x & 3 \sin x \cos x \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \cos x & \sin x \\ -\sin x & \cos x \end{vmatrix}} = \frac{3 \cos^2 x \sin x}{\cos^2 x + \sin^2 x} = 3 \cos^2 x \sin x \\ \Rightarrow c_2(x) &= 3 \int \cos^2 x \sin x dx = -3 \int u^2 du = -u^3 = -\cos^3 x \end{aligned}$$

de donde

$$y_p = -\sin^3 x \cos x - \cos^3 x \sin x$$

Así la solución buscada es

$$y_E = c_1 \cos x + c_2 \sin x - \sin^3 x \cos x - \cos^3 x \sin x$$

Ejercicio 4 Determinemos los puntos estacionarios:

$$\begin{cases} f_x(x, y) = 0 \\ f_y(x, y) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x^3 + 4xy^2 - 4x = 0 \\ 4x^2y + 4y^3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x(x^2 + y^2 - 1) = 0 \\ y(x^2 + y^2) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow [x = -1, y = 0], [x = 1, y = 0], [x = 0, y = 0]$$

Vamos a clasificarlos utilizando el criterio de Hess.

Tenemos que

$$\mathbb{H}f(x, y) = \begin{pmatrix} 12x^2 + 4y^2 - 4 & 8xy \\ 8xy & 4x^2 + 12y^2 \end{pmatrix}$$

luego

$$\begin{aligned} \mathbb{H}f(\pm 1, 0) &= \begin{pmatrix} 8 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow \det(\mathbb{H}f(1, 1)) = 32 \quad \text{y} \quad \text{traza}(\mathbb{H}f(\pm 1, 0)) = 12 \\ \Rightarrow f &\text{ tiene mínimo local en } (\pm 1, 0) \end{aligned}$$

y

$$\mathbb{H}f(0, 0) = \begin{pmatrix} -4 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \det(\mathbb{H}f(0, 0)) = 0 \quad \text{No decide.}$$

Pero

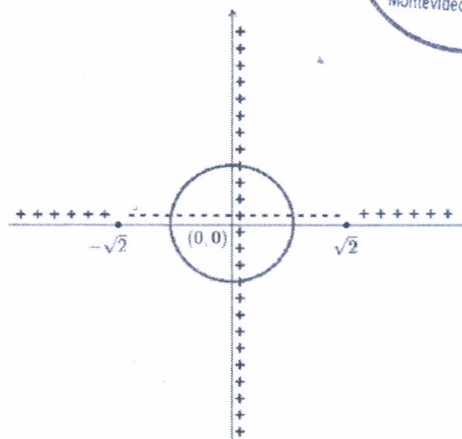
$$\Delta f_{(0,0)}(x, y) = f(x, y) - f(0, 0) = x^4 + y^4 + 2x^2y^2 - 2x^2$$

3 de 4

y se tiene que

$$\Delta f_{(0,0)}(x, 0) = x^4 - 2x^2 = x^2(x^2 - 2)$$

$$\Delta f_{(0,0)}(0, y) = y^4$$



por lo tanto $(0, 0)$ es un punto silla.

