



Matemática Inicial

Examen, 23 de julio de 2025.



N° Lista	Apellido y Nombre	Cédula	Grupo

Importante: en esta prueba evaluaremos fundamentalmente el desarrollo de las resoluciones más que los resultados. Por lo tanto, es importante que las respuestas estén debidamente justificadas y que lo que escriban sea legible y comprensible.

Ejercicio 1 (25 puntos) 1. Resolver la siguiente inecuación en $\mathbb{R}$:

$$|2x + 3| < 5$$

Solución. Tenemos que $|2x + 3| < 5$ si y solo si $-5 < 2x + 3 < 5$.

Resolviendo primero la inecuación $-5 < 2x + 3$ obtenemos que $-4 < x$. De la segunda inecuación que es $2x + 3 < 5$ llegamos a que $x < 1$. En conclusión el conjunto solución de esta inecuación es:

$$A = (-4, +\infty) \cap (-\infty, 1) = (-4, 1)$$

2. Resolver la siguiente inecuación en $\mathbb{R}$:

$$\left(\frac{3}{2}\right)^{x^2} \geq \left(\frac{4}{9}\right)^{3x}$$

Solución. Comenzaremos reescribiendo $\left(\frac{4}{9}\right)^{3x}$. Tenemos que:

$$\left(\frac{4}{9}\right)^{3x} = \left(\left(\frac{2}{3}\right)^2\right)^{3x} = \left(\frac{2}{3}\right)^{6x} = \left(\frac{3}{2}\right)^{-6x}$$

Entonces de la inecuación $\left(\frac{3}{2}\right)^{x^2} \geq \left(\frac{3}{2}\right)^{-6x}$ (al ser $\frac{3}{2} > 1$) obtenemos la inecuación $x^2 \geq -6x$ que es equivalente a $x^2 + 6x \geq 0$. Hallando el signo del polinomio $x^2 + 6x$ (las raíces son 0 y -6) concluimos que $x^2 + 6x \geq 0$ si y solo si $x \geq 0$ o $x \leq -6$ y por lo tanto el conjunto solución de la inecuación es:

$$B = (-\infty, -6] \cup [0, +\infty)$$

3. Si A es el conjunto solución de la inecuación de la parte 1 y B es el conjunto solución de la parte 2, hallar $A \cap B$.

Solución.

$$A \cap B = (-4, 1) \cap ((-\infty, -6] \cup [0, +\infty)) = [0, 1)$$



1/4

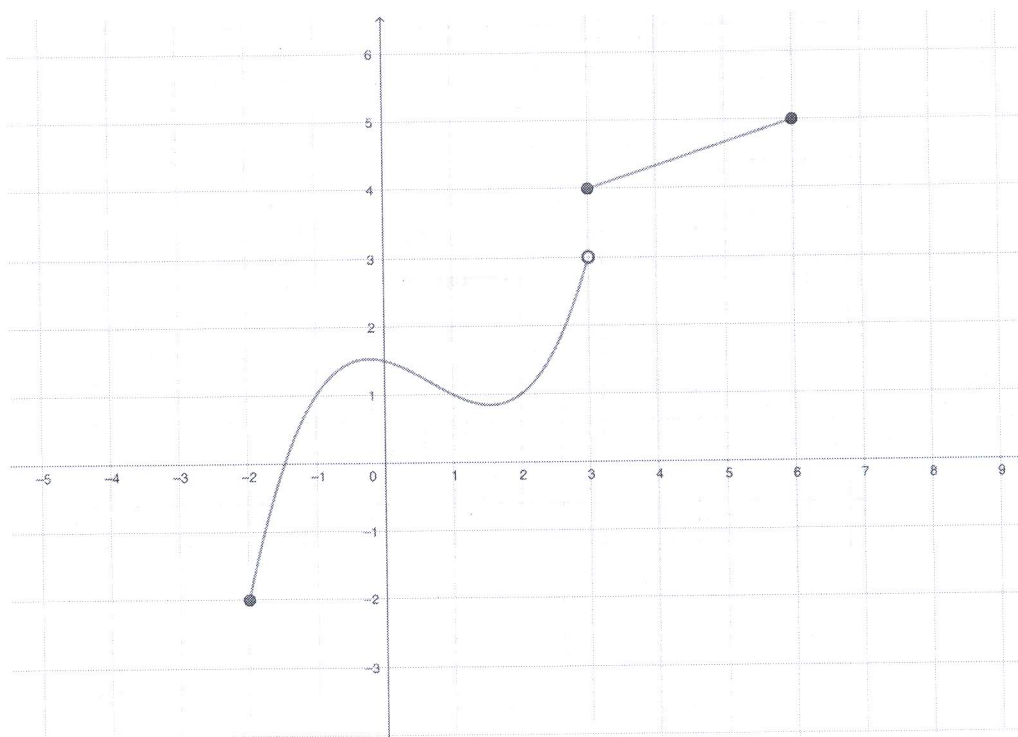


Matemática Inicial

Examen, 23 de julio de 2025.



Ejercicio 2 (25 puntos) Dado el gráfico de la función $g : [-2, 6] \rightarrow \mathbb{R}$:



1. Hallar el conjunto de preimágenes de 1.

Solución. El conjunto de preimágenes de 1 es $\{-1, 1, 2\}$

2. Hallar el conjunto imagen $\text{Im}(g)$.

Solución. La imagen de la función g es $[-2, 3) \cup [4, 5]$

3. Hallar $\lim_{x \rightarrow 3^-} g(x)$ y $\lim_{x \rightarrow 3^+} g(x)$. ¿Es g continua en $x = 3$? Justifique.

Solución. $\lim_{x \rightarrow 3^-} g(x) = 3$ y $\lim_{x \rightarrow 3^+} g(x) = 4$. Al tener límites laterales distintos cuando x tiende a 3 esta función no es continua en 3.

4. Ordenar de menor a mayor los elementos del siguiente conjunto $\{g'(1), g'(3/2), g'(5/2), g'(4)\}$

Solución. El orden de las derivadas es el siguiente: $g'(1) < g'(3/2) < g'(4) < g'(5/2)$

5. Graficar $h(x) = |g(x+2)|$ indicando su dominio.

Solución. Aquí podemos ver el gráfico de h a partir del gráfico de g . Observar que al evaluar en $x+2$ lo que hacemos es una traslación a la izquierda de dos valores, luego al tomar valor absoluto el gráfico de la que es positivo queda igual y dónde es negativo pasa a ser positivo (simetrizar respecto al eje x).

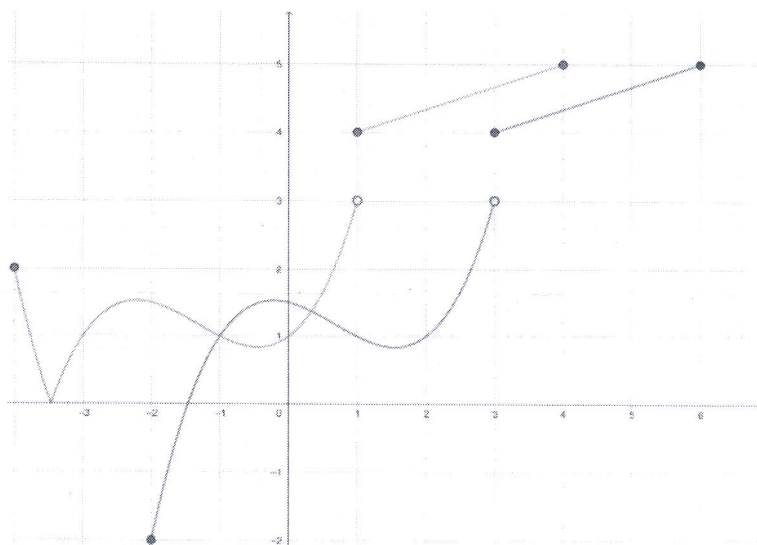


2/4



Matemática Inicial

Examen, 23 de julio de 2025.



Ejercicio 3 (24 puntos) Dado un parámetro $b \in \mathbb{R}$ se considera la función $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^3 + x^2 - 2x}{x^2 - 2x} & \text{si } x < 0, \\ b & \text{si } x = 0, \\ (1 + x^2)\cos(x) & \text{si } x > 0. \end{cases}$$



1. ¿Existe un valor de b de modo que f resulte continua? En caso afirmativo hallarlo. Justificar.

Solución. La función es claramente continua en todo $x \neq 0$. Para $x = 0$ tenemos que ver que:

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = f(0)$$

Por un lado,

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x^3 + x^2 - 2x}{x^2 - 2x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x(x^2 + x - 2)}{x(x - 2)} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x^2 + x - 2}{x - 2} = 1.$$

Por otro lado,

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (1 + x^2)\cos(x) = 1.$$

Por lo tanto, para que f sea continua, $b = f(0) = 1$.

2. Hallar $f'(-1)$ y $f'(\frac{\pi}{2})$.

Solución. Para calcular $f'(-1)$ calcularemos $\left(\frac{x^3 + x^2 - 2x}{x^2 - 2x}\right)'$ y luego evaluaremos en $x = -1$.

$$\left(\frac{x^3 + x^2 - 2x}{x^2 - 2x}\right)' = \frac{(3x^2 + 2x - 2)(x^2 - 2x) - (x^3 + x^2 - 2x)(2x - 2)}{(x^2 - 2x)^2}.$$

$$\text{Luego } f'(-1) = \frac{-1(3) - (-2)(-4)}{3^2} = \frac{5}{9}.$$

Para calcular $f'(\frac{\pi}{2})$ calcularemos $((1 + x^2)\cos(x))'$ y luego evaluaremos en $x = \frac{\pi}{2}$.

$$((1 + x^2)\cos(x))' = 2x(\cos(x)) - (1 + x^2)\sin(x)$$

$$\text{Luego, } f'(\frac{\pi}{2}) = 2\frac{\pi}{2}\cos(\frac{\pi}{2}) - (1 + (\frac{\pi}{2})^2)\sin(\frac{\pi}{2}) = -1 - \frac{\pi^2}{4}. \text{ Usamos que } \cos(\frac{\pi}{2}) = 0 \text{ y que } \sin(\frac{\pi}{2}) = 1.$$

3/4



Matemática Inicial

Examen, 23 de julio de 2025.

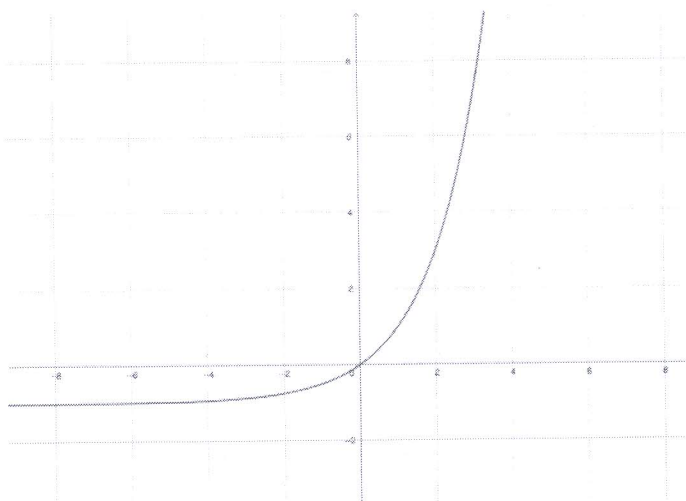


Ejercicio 4 (26 puntos) Se consideran las siguientes funciones:

- $f : (1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \log_2(x^2 - 1)$
- $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $g(x) = 2^x - 1$

1. Bosquejar la función g .

Solución. El bosquejo de g es el siguiente:



2. ¿La función compuesta $f \circ g$ está bien definida? Justifique su respuesta.

Solución. La función $f \circ g$ no queda bien definida ya que $\text{Im}(g) = (-1, +\infty)$ no está contenida en el dominio de f que es $(1, +\infty)$.

3. Justificar que la composición $g \circ f$ está bien definida y hallar la función compuesta $h = g \circ f$ indicando su dominio.

Solución. La función $g \circ f$ sí queda bien definida ya que el dominio de g es todo $\mathbb{R}$ por lo tanto se va a verificar $\text{Im}(f) \subset \text{Dom}(g)$. El dominio de $g \circ f$ es igual al dominio de f que es $(1, +\infty)$. La función compuesta nos queda:

$$h(x) = (g \circ f)(x) = g(f(x)) = 2^{\log_2(x^2 - 1)} - 1 = x^2 - 2$$

4. Calcular la función derivada h' .

Solución. $h'(x) = 2x$.

5. ¿Es la función h inyectiva? Justifique su respuesta.

Solución. Como el dominio de h es $(1, +\infty)$ y $h'(x) = 2x$ tenemos que $h'(x) > 0$ en todo su dominio por lo tanto la función es estrictamente creciente lo que implica que es inyectiva.

4/4