

Mesa especial Introducción a la Investigación de Operaciones

Instituto de Computación - 28 de abril de 2023

- Duración: 4 horas.
- Escribir las hojas de un solo lado. - No se permite el uso de material ni calculadora.
- Numerar las hojas. - Poner nombre y número de cédula en el ángulo superior derecho de cada hoja.
- Escribir en la primera hoja el total de hojas entregadas. Las partes no legibles se considerarán no escritas.
- Justifique todos sus razonamientos.

Ejercicio 1 - 10 puntos

Considere el problema (P) de Programación Matemática: (P)
$$\begin{cases} \max_{x,y,z} & x + y + z \\ \text{s.a.} & 4x^2 + 16y^2 + z^2 \leq 16 \\ & 2x + 4y + z \geq 4 \end{cases}$$

Se pide:

- a) Reformule (P) para dejarlo en el formato canónico visto en clase (C)
$$\begin{cases} \min_{x,y,z} & f(x, y, z) \\ \text{s.a.} & g_i(x, y, z) \leq 0 \quad (i = 1, 2) \end{cases}$$

Use las propiedades vistas en teórico para probar la convexidad de la función objetivo $f(x, y, z)$, de las restricciones $g_i(x, y, z)$ y de la región factible del problema.

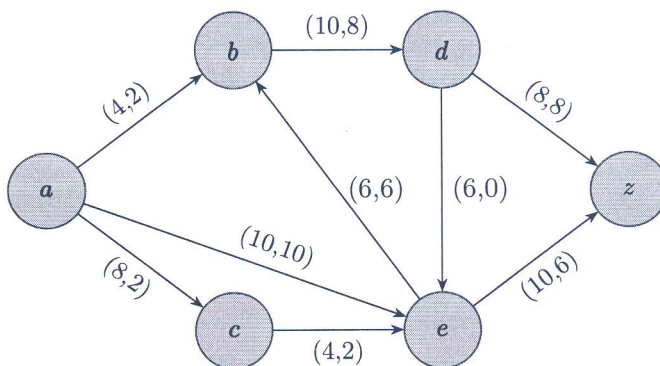
- b) Plantee las condiciones de Karush-Kuhn-Tucker (KKT) para (C). Resuelva las ecuaciones anteriores. La solución es única, así que deténgase al hallarla (no hay que descartar otras).

NOTA: Durante los cálculos se recomienda usar: $2^3 = 8$, $2^4 = 16$, $2^5 = 32$ y que $\sqrt{21} < \frac{23}{5}$.

- c) Asuma que las partes a) y b) están resueltas, que se tiene una solución que cumple las condiciones KKT, que no hay otra solución a esas ecuaciones y que conoce además un punto tal que $g_1(x, y, z) < 0$ y $g_2(x, y, z) < 0$ (que el dominio es no-trivial) ¿Se puede afirmar que la solución de la parte b) es un óptimo local o global? ¿Es posible que exista otro óptimo? ¿Cuál es el valor óptimo de (P)?

Ejercicio 2 - 10 puntos

Considere la siguiente red de flujos con nodo fuente a y nodo terminal z, con las etiquetas (capacidad, flujo) indicadas en los arcos:



- a) Defina flujo a-z en una red de transporte. ¿Es el flujo asignado en la figura un flujo a-z? Justificar.



- b) Indique la capacidad del corte a-z, (P, P^c) , determinado por $P = \{a, c, e\}$.
- c) Sin aplicar Ford-Fulkerson: ¿existe algún flujo a-z de valor mayor que 20 sobre esta red? Justificar.
- d) Hallar el flujo máximo y un corte de capacidad mínima de la red, aplicando el algoritmo de Ford-Fulkerson visto en el curso, partiendo del flujo asignado.

Ejercicio 3 - 12 puntos

Dado el siguiente problema de Programación Lineal (L)

$$\begin{cases} \max_{x_1, x_2} & -x_1 + x_2 \\ \text{s.a.} & x_1 + x_2 \geq 1 \\ & 3x_1 + 2x_2 = 6 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

Se pide:

- a) Plantear el problema en su forma estándar para el Método Simplex, incluyendo las variables artificiales que sean necesarias para lanzar la Fase-I.
- b) Preparar el tableau del Método Simplex, alcanzando la solución básica inicial de la Fase-I, donde la base es el conjunto de variables artificiales antes introducidas. Nota: no se pide resolver, sólo preparar el tableau para comenzar la primer iteración.
- c) Al final de la Fase-I se obtiene el siguiente tableau:

x_1	x_2	x_3	y_1	y_2	b
1	$\frac{2}{3}$	0	0	$\frac{1}{3}$	2
0	$-\frac{1}{3}$	1	-1	$\frac{1}{3}$	1
0	$-\frac{5}{3}$	0	0	$-\frac{1}{3}$	-2
0	0	0	1	1	0

¿Cuál es la solución factible encontrada para comenzar la Fase-II?

- d) Determinar la solución óptima del problema es decir, realizar la Fase-II.

Ejercicio 4 - 26 puntos

Un guardia de seguridad vigila cuatro cuadras de la calle "8 de Octubre". Las cuadras son consecutivas y las llamaremos A, B, C y D. Cada 15 minutos el guardia tira una moneda (balanceada) para decidir si sigue vigilando la misma cuadra o se cambia. Si tiene que cambiar y hay más de una cuadra adyacente posible (cuadras B y C) entonces tira nuevamente la moneda para decidir a cuál de ellas dirigirse. En los otros casos (cuadras A y D) va a vigilar la única adyacente.

Se pide:

- a) Determinar la matriz de transición de éste proceso y dibujar su grafo asociado.
- b) Todas las mañanas el guardia comienza en la cuadra A. ¿Cuál es la probabilidad de que a los 45 minutos de comenzada la labor le toque vigilar la cuadra D? ¿Cuál es la probabilidad de que a los 45 minutos de comenzada la labor le toque vigilar la cuadra D por primera vez? ¿Y la probabilidad de que a los 45 minutos de comenzada la labor le toque vigilar la cuadra C por primera vez? Fundamente el método empleado.

- c) El guardia vigila durante 8 horas. Para mejorar la seguridad, se decide realizar la vigilancia de forma ininterrumpida, disponiendo de tres turnos de guardias cubriendo las 24 horas del día. Cada guardia realiza la vigilancia de acuerdo a las pautas de la letra, comenzando el turno en la cuadra que dejó el guardia anterior. Pasado suficiente tiempo, ¿cuánto porcentaje de tiempo se vigilará cada cuadra? Fundamente el resultado.

Ejercicio 5 - 16 puntos

Sea X una CMFTCH con estados E , Q su generador infinitesimal. Se cumple que π es una distribución estacionaria, si y sólo si, para cualquier subconjunto propio $A \subset E$ se verifica:

$$\sum_{i \in A} \sum_{j \notin A} q_{ij} \pi_i = \sum_{j \notin A} \sum_{i \in A} q_{ji} \pi_j,$$

propiedad conocida como "Ecuaciones de Balance".

Se pide: Demuestre que se cumple la propiedad antes mencionada para las Ecuaciones de Balance.

Ejercicio 6 - 26 puntos

Una empresa de transporte urbano cuenta con B buses para brindar su servicio. Cada ómnibus puede sufrir un desperfecto, al cabo de un tiempo exponencial de tasa λ (individual para cada ómnibus). La empresa tiene un taller, donde los ómnibus que no pueden circular son reparados. Se puede reparar un solo ómnibus por vez, los restantes esperan su turno (siendo atendidos en orden de llegada). El tiempo de reparación sigue una distribución exponencial, de tasa μ .

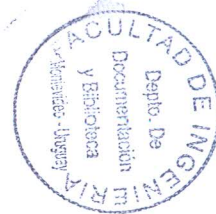
Se pide:

- a) Representar como un PNM indicando las tasas. Estudiar la estabilidad del sistema. Determinar las ecuaciones de balance y las probabilidades en estado estacionario en función de los parámetros $r = \frac{\lambda}{\mu}$ y B .

Supongamos que la cantidad de buses es $B = 3$, y que los parámetros $\lambda = 1$ rotura cada 6 semanas y $\mu = 1$ reparación por semana.

- b) Calcular la probabilidad de que el taller esté ocupado en este caso.
- c) Calcular el número medio de ómnibus en funcionamiento.
- d) Calcular el tiempo medio que un ómnibus que se rompe debe esperar hasta comenzar a ser reparado (este es el tiempo "desperdiciado" por no poder comenzar la reparación inmediatamente).

Solución



Ejercicio 1 - 10 puntos

a) El problema en su forma canónica es:

$$(C) \begin{cases} \min_{x,y,z} & f(x,y,z) = -x - y - z \\ \text{s.a.} & g_1(x,y,z) = 4x^2 + 16y^2 + z^2 - 16 \leq 0 \\ & g_2(x,y,z) = 4 - 2x - 4y - z \leq 0 \end{cases}$$

Las funciones f y g_2 son convexas (además de cóncavas) por ser lineales. La función g_1 también es convexa, ya que es una combinación lineal a *coeficientes positivos* de funciones convexas: x^2 , y^2 y z^2 .

Si una función h es convexa, el conjunto definido por $\{x|h(x) \leq \alpha\}$ es convexo para todo α (es la propiedad *iv*) pág-15 notas teórico). En consecuencia, las restricciones $g_1 \leq 0$ y $g_2 \leq 0$ definen conjuntos convexas en $\mathbb{R}^3$. La región factible de (C) es la intersección de esos conjuntos convexas y también debe serlo (propiedad *ii*) pág-15 notas teórico).

b) Las condiciones KKT para (C) son:

$$\begin{aligned} i) \quad \nabla f + \lambda_1 \nabla g_1 + \lambda_2 \nabla g_2 &= \vec{0} \Rightarrow \begin{cases} i_1) & 8x\lambda_1 - 2\lambda_2 = 1 \\ i_2) & 32y\lambda_1 - 4\lambda_2 = 1 \\ i_3) & 2z\lambda_1 - \lambda_2 = 1 \end{cases} \\ ii) \quad \lambda_1, \lambda_2 &\geq 0, \\ iii_1) \quad \lambda_1 \cdot (4x^2 + 16y^2 + z^2 - 16) &= 0, \\ iii_2) \quad \lambda_2 \cdot (4 - 2x - 4y - z) &= 0, \\ iv_1) \quad 4x^2 + 16y^2 + z^2 &\leq 16 \\ iv_2) \quad 2x + 4y + z &\geq 4 \end{aligned}$$

Si probamos con $\lambda_1 > 0$, $\lambda_2 = 0$, por las ecuaciones i) llegamos a: $x = \frac{1}{2^3\lambda_1}$, $y = \frac{1}{2^5\lambda_1}$, $z = \frac{1}{2\lambda_1}$. Como $\lambda_1 > 0$, debe ser $4x^2 + 16y^2 + z^2 = 16 = 2^4 = \frac{1}{\lambda_1^2}(\frac{2^2}{2^6} + \frac{2^4}{2^{10}} + \frac{1}{2^2}) = \frac{1}{\lambda_1^2}(\frac{2^2}{2^6} + \frac{1}{2^6} + \frac{2^4}{2^6})$. Despejando llegamos a que $\lambda_1^2 = \frac{1+4+16}{2^{10}}$. Como $\lambda_1 > 0$, debe ser $\lambda_1 = \frac{\sqrt{21}}{32}$, de donde: $x = \frac{4}{\sqrt{21}}$, $y = \frac{1}{\sqrt{21}}$, $z = \frac{16}{\sqrt{21}}$. Resta verificar iv_2). Sustituimos y llegamos a $2x + 4y + z = \frac{8+4+16}{\sqrt{21}} = \frac{28}{\sqrt{21}} > \frac{28}{23/5} = \frac{140}{23} > 4$.

c) Como las funciones f , g_1 y g_2 son convexas y el dominio es no-trivial, las condiciones KKT son necesarias y suficientes para la existencia de óptimos locales (ver pág-19 y 20 notas teórico). Además, el punto anterior es un óptimo local y es el único posible (porque según letra las condiciones KKT no tienen otra solución). Además, por la convexidad de las funciones, el óptimo es global (ver teorema previo a Sec-2.4, pág-19 notas teórico). El valor de ese óptimo es $\sqrt{21}$.

Ejercicio 2 - 10 puntos

a) Dada la red de transporte $G = (X, U, W)$ (grafo orientado y ponderado), con un nodo fuente a y un nodo terminal z . El conjunto de vértices es X (donde se encuentran a y z), el conjunto de aristas es U , y la ponderación por arista es W , donde la ponderación para la arista u , $w(u) = (\kappa(u), \varphi(u))$, está formada por la capacidad de la arista $\kappa(u)$, y por el flujo $\varphi(u)$.

Un flujo $a - z$ es un flujo $\varphi(u) \forall u \in U$ que satisface:

- i) $0 \leq \varphi(u) \leq \kappa(u)$, $\forall u \in U$ (el flujo no puede superar la capacidad de cada arista);
- ii) $\varphi(u) = 0$, $\forall u \in I^-(a)$, $\forall u \in I^+(z)$ (no entra flujo a la fuente, ni sale flujo del terminal);
- iii) $\sum_{u \in I^+(x)} \varphi(u) = \sum_{u \in I^-(x)} \varphi(u)$, $\forall x \notin \{a, z\}$ (en todo nodo entra la misma cantidad de flujo del que sale, excepto en a y z).

Observación: notar que utilizamos $I^+(x)$ para determinar el conjunto de todas las aristas salientes al vértice x , y $I^-(x)$ para determinar el conjunto de todas las aristas entrantes.

En el caso particular, el flujo asignado es $a-z$ porque el flujo en cada arco es a lo sumo igual a su capacidad, no hay flujo entrante al nodo fuente ni saliente del nodo terminal, y se cumple el equilibrio de flujo para el resto de los nodos de la red (el flujo que entra es igual al flujo que sale).

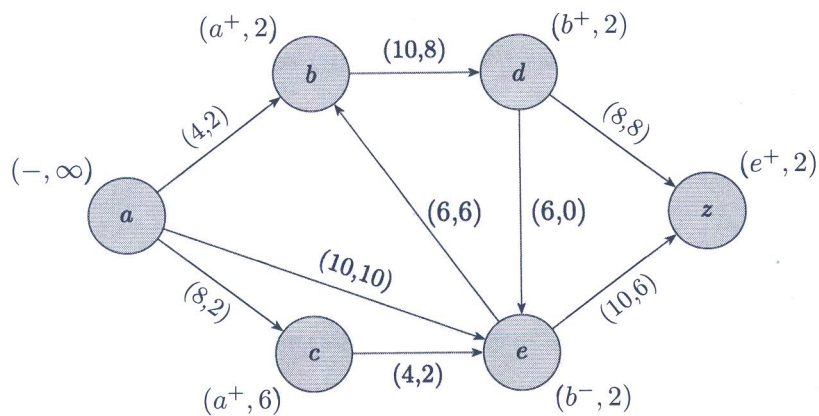
- b) En este caso, $P = \{a, c, e\}$, el corte es $(P, P^C) = \{(a, b), (e, b), (e, z)\}$ y tiene capacidad $\kappa(P, P^C) = 4 + 6 + 10 = 20$.
- c) No puede existir un flujo $a-z$ de valor mayor que 20, debido a que el corte (P, P^C) con $P = \{a, c, e\}$, tiene capacidad $\kappa(P, P^C) = 20$, y el siguiente teorema asegura que no puede existir un flujo $a-z$ de valor mayor a la capacidad de cualquier corte (todo flujo es menor a la capacidad de cualquier corte):

Teorema. $\forall$ flujo $a - z$, φ , y $\forall$ corte $a - z$, (P, P^C) :

$$|\varphi| \leq \kappa(P, P^C).$$

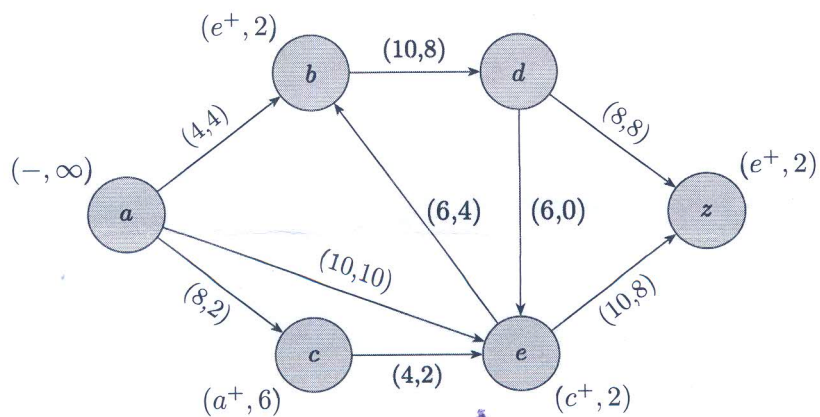
- d) Aplicamos el algoritmo de Ford-Fulkerson sobre la red con el flujo $a-z$ asignado, comenzando el etiquetado desde la fuente a , buscando un camino de aumento $a-z$ en cada iteración, si es que existe.

Iteración 1:



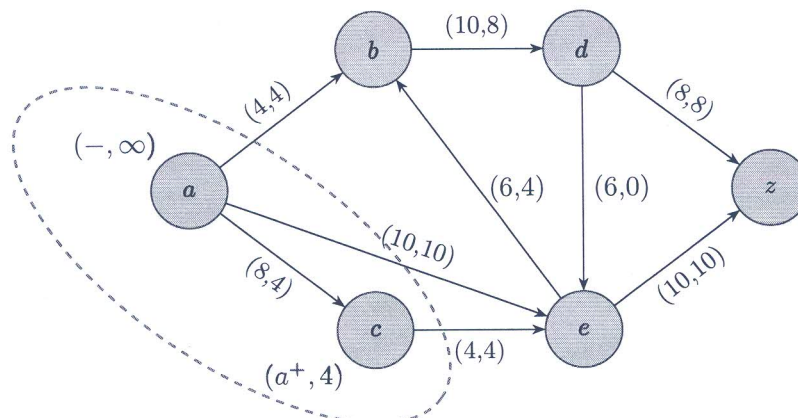
Camino de aumento: $a - b - e - z, +2$.

Iteración 2:



Camino de aumento: $a - c - e - z, +2$.

Iteración 3:



No es posible llegar al nodo terminal z , por lo cual el algoritmo de Ford-Fulkerson termina. Los nodos marcados en la última iteración determinan un corte de capacidad mínima. En este caso $P = \{a, c\}$ y el corte es $(P, P^C) = \{(a, b), (a, e), (c, e)\}$. Se puede corroborar que todos los arcos del corte están saturados y que no hay flujos entrantes positivos de P^C a P . La capacidad del corte mínimo es 18, que es igual al flujo máximo de la red, es decir: $k(P, P^C) = 18 = \sum_{u \in I^+(a)} \varphi(u) = |\varphi|$.



Ejercicio 3 - 12 puntos

- a) Para llevar el problema a su forma estándar hay que cambiar max por min y agregar una variable de holgura $x_3 \geq 0$ en la primera restricción.

$$(L') \begin{cases} \min_{x_1, x_2, x_3} & x_1 - x_2 \\ \text{s.a.} & x_1 + x_2 - x_3 = 1 \\ & 3x_1 + 2x_2 = 6 \\ & x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{cases}$$

De agregar también las variables artificiales $y_1, y_2 \geq 0$ para la Fase-I se llega a:

$$(L'') \begin{cases} \min_{x_i, y_j} & y_1 + y_2 \\ \text{s.a.} & x_1 + x_2 - x_3 + y_1 = 1 \\ & 3x_1 + 2x_2 + y_2 = 6 \\ & x_1, x_2, x_3, y_1, y_2 \geq 0 \end{cases}$$

- b) El tableau inicial para la Fase-I es:

x_1	x_2	x_3	y_1	y_2	b
1	1	-1	1	0	1
3	2	0	0	1	6
1	-1	0	0	0	0
0	0	0	1	1	0

Se opera sobre él hasta alcanzar la solución básica:

x_1	x_2	x_3	y_1	y_2	b
1	1	-1	1	0	1
3	2	0	0	1	6
1	-1	0	0	0	0
-4	-3	1	0	0	-7

- c) La solución factible encontrada para comenzar la Fase-II es: $x_1 = 2$, $x_2 = 0$, $x_3 = 1$. Además $y_1 = y_2 = 0$.

- d) Continuamos con la Fase-II desde el tableau dado en la letra.

x_1	x_2	x_3	b
1	$\frac{2}{3}$	0	2
0	$-\frac{1}{3}$	1	1
0	$-\frac{5}{3}$	0	-2

Se ingresa x_2 a la base y se saca x_1 :

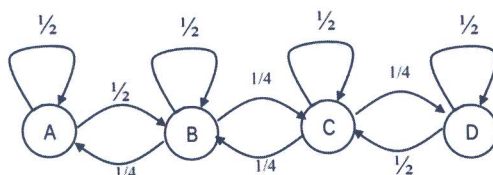
x_1	x_2	x_3	b
$\frac{3}{2}$	1	0	3
$\frac{1}{2}$	0	1	2
$\frac{5}{2}$	0	0	3

La solución es $x_1 = 0$, $x_2 = 3$, $x_3 = 2$, y el valor óptimo del problema (L) es 3.

Ejercicio 4 - 26 puntos

a) La matriz de transición P y el grafo asociado son:

$$P = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$



b) La probabilidad de estar en la cuadra D habiendo comenzado en A luego de $45 = 3 \times 15$ minutos es $p_{AD}^{(3)} = \frac{1}{32}$ (el único camino posible es $A - B - C - D$).

La probabilidad de pasar por primera vez a la cuadra D desde A luego de $45 = 3 \times 15$ minutos es $f_{AD}^{(3)}$. Aplicando tres pasos de la recursión para $f_{AD}^{(3)}$ obtenemos que:

$$f_{AD}^{(1)} = p_{AD} = 0;$$

$$f_{AD}^{(2)} = p_{AD}^{(2)} - f_{AD}^{(1)} p_{DD} = 0;$$

$$f_{AD}^{(3)} = p_{AD}^{(3)} - f_{AD}^{(2)} p_{DD} - f_{AD}^{(1)} p_{DD}^{(2)} = \frac{1}{32}.$$

Si repetimos para la probabilidad de pasar por primera vez a la cuadra C desde A luego de 45 minutos, $f_{AC}^{(3)}$:

$$f_{AC}^{(1)} = p_{AC} = 0;$$

$$f_{AC}^{(2)} = p_{AC}^{(2)} - f_{AC}^{(1)} p_{CC} = \frac{1}{8};$$

$$f_{AC}^{(3)} = p_{AC}^{(3)} - f_{AC}^{(2)} p_{CC} - f_{AC}^{(1)} p_{CC}^{(2)} = \frac{1}{8}.$$

c) Tras suficiente tiempo, el porcentaje de residencia en cada estado lo rige la distribución estacionaria. Busquemos el vector de distribución estacionaria $\pi = (\pi_A, \pi_B, \pi_C, \pi_D)$ que verifica el sistemas de ecuaciones: $\pi P = \pi$, y $\pi_A + \pi_B + \pi_C + \pi_D = 1$. Resolviendo se obtiene: $\pi_A = \pi_D = \frac{1}{6}$ y $\pi_B = \pi_C = \frac{1}{3}$.

Ejercicio 5 - 16 puntos

Ver Propiedad 31 (página 73) del Teórico de Procesos Estocásticos.

Ejercicio 6 - 26 puntos



- a) Este sistema es una fila de espera $M/M/1/FIFO/\infty/B$, con un servidor y una población externa de tamaño B . Se puede representar como un PNM, con las siguientes tasas:

$$\lambda_k = (B - k)\lambda, \quad 0 \leq k \leq B - 1,$$

$$\lambda_k = 0, \quad k \geq B,$$

$$\mu_k = \mu, \quad 1 \leq k \leq B$$

Como el proceso es finito entonces es estable para cualquier combinación de valores de B , λ y μ , y las ecuaciones de balance permiten calcular la distribución límite a través de la estacionaria.

Las ecuaciones de balance son las siguientes:

$$B \cdot \lambda \cdot p_0 = \mu \cdot p_1$$

$$(B - 1) \cdot \lambda \cdot p_1 = \mu \cdot p_2$$

$$(B - 2) \cdot \lambda \cdot p_2 = \mu \cdot p_3$$

...

$$(B - k) \cdot \lambda \cdot p_k = \mu \cdot p_{k+1}$$

...

$$\lambda \cdot p_{B-1} = \mu \cdot p_B.$$

Resolviendo y usando que $r = \frac{\lambda}{\mu}$ resulta que: $p_k = \frac{B!}{(B - k)!} \cdot r^k \cdot p_0$, donde $p_0 = (\sum_{k=0}^B \frac{B!}{(B - k)!} r^k)^{-1}$.

- b) Los parámetros son $B = 3$, $\lambda = \frac{1}{6} \text{sem}^{-1}$ y $\mu = 1 \text{sem}^{-1}$, por lo que $r = \frac{\lambda}{\mu} = \frac{1}{6}$. La probabilidad de que el taller esté ocupado es 1-probabilidad de que el taller esté libre, p_0 . Con los parámetros de este caso específico, resulta $p_0 = (1 + 3r + 6r^2 + 6r^3)^{-1} = (\frac{36+18+6+1}{36})^{-1} = \frac{36}{61}$. Por lo tanto, la probabilidad que el taller esté ocupado es $25/61$.
- c) En el estado k , la cantidad de buses en funcionamiento es $B - k$, y el número esperado de buses en funcionamiento es $\sum_{k=0}^B (B - k)p_k = 3p_0 + 2p_1 + p_2 = 3 \cdot \frac{36}{61} + 2 \cdot \frac{18}{61} + \frac{6}{61} = \frac{150}{61}$.
- d) El tiempo medio que un ómnibus que se rompe debe esperar hasta comenzar a ser reparado es el tiempo medio en la fila $\bar{t}_f$, que por las ecuaciones de Little resulta ser $\bar{t}_f = \bar{v}/\bar{\lambda}$. Calculamos ambos términos: $\bar{v} = \sum_{n=1}^B n p_n = p_1 + 2p_2 = \frac{6}{61} + 2 \cdot \frac{1}{61} = \frac{8}{61}$ y $\bar{\lambda} = 3\lambda \cdot p_0 + 2\lambda \cdot p_1 + \lambda \cdot p_2 = \frac{18+6+1}{61} = \frac{25}{61}$. Por tanto, $\bar{t}_f = \frac{8}{61} / \frac{25}{61} = \frac{8}{25}$ semanas, esto es, $\bar{t}_f = 2.24$ días.

