

Examen de Lógica

5 de diciembre de 2024

Indicaciones generales

- Apagar los celulares.
- La duración del examen es de **tres (3)** horas.
- En esta prueba **no** se permite consultar material alguno.
- **Toda respuesta debe estar fundamentada.** Pueden usarse los resultados que aparecen en el texto del curso, en esos casos debe describirse con precisión el enunciado que se utiliza.
- Numerar todas las hojas e incluir en cada una su nombre y cédula de identidad, utilizar las hojas de un solo lado, escribir con lápiz, iniciar cada ejercicio en hoja nueva y poner en la primera hoja la cantidad de hojas entregadas.

Ejercicio 1(25 puntos)

Considere el siguiente alfabeto $\Sigma = \{a, b, c\}$ y el conjunto A definido a continuación:

i $\epsilon \in A$

ii Si $x \in \Sigma$, $y \in \Sigma$ y $w \in A$, entonces $xwy \in A$

a. ¿Qué conjunto queda definido por las reglas anteriores? Escriba una frase que lo describa.

b. I. Defina la función $\text{largo} : A \rightarrow \mathbb{N}$ que dado un elemento de A devuelva la cantidad de símbolos que tiene.

II. Defina la función $\text{invertir} : A \rightarrow A$ que dado un elemento de A devuelva el elemento con los símbolos invertidos.

III. Defina la función $\text{cantEspejo} : A \rightarrow \mathbb{N}$ que dado un elemento w de A devuelva el largo del mayor prefijo de la primera mitad de w tal que al invertirlo es un sufijo de w .

Ejemplos:

- $\text{cantEspejo}(\text{abcbba}) = 2.$
- $\text{cantEspejo}(\text{bcb}) = 1.$
- $\text{cantEspejo}(\text{abccba}) = 3.$
- $\text{cantEspejo}(\text{abccbb}) = 0.$



c. Demostrar que $(\forall w \in A)(w = \text{invertir}(w) \Rightarrow \text{largo}(w) = 2 * \text{cantEspejo}(w)).$

Propuesta de solución

a. El conjunto definido por las reglas son las tiras de Σ^* de largo o cantidad de símbolos par.

b. I. $\text{largo} : A \rightarrow \mathbb{N}$
 $\text{largo}(\epsilon) = 0$
 $\text{largo}(xwy) = 2 + \text{largo}(w)$

$$\begin{aligned} \text{II. } & \text{invertir} : A \rightarrow A \\ & \text{invertir}(\epsilon) = \epsilon \\ & \text{invertir}(xwy) = y\text{invertir}(w)x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{III. } & \text{cantEspejo} : A \rightarrow \mathbb{N} \\ & \text{cantEspejo}(\epsilon) = 0 \\ & \text{cantEspejo}(xwy) = \begin{cases} 1 + \text{cantEspejo}(w) & \text{si } x = y \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases} \end{aligned}$$

- c. Se probará $(\forall w \in A)(w = \text{invertir}(w) \Rightarrow \text{largo}(w) = 2 * \text{cantEspejo}(w))$ por inducción en A .

Identificación de la propiedad.

Sea $P(w) := w = \text{invertir}(w) \Rightarrow \text{largo}(w) = 2 * \text{cantEspejo}(w)$

PB.

T) $P(\epsilon) : \epsilon = \text{invertir}(\epsilon) \Rightarrow \text{largo}(\epsilon) = 2 * \text{cantEspejo}(\epsilon)$

Dem.

Para demostrar un implica, demostramos el consecuente suponiendo que se cumple el antecedente.

En este caso, por definición $\text{largo}(\epsilon) = 0$ y $\text{cantEspejo}(\epsilon) = 0$. Por lo tanto, $\text{largo}(\epsilon) = 0 = 2 * 0 = 2 * \text{cantEspejo}(\epsilon)$.

■

PI.

H) $P(w) : w = \text{invertir}(w) \Rightarrow \text{largo}(w) = 2 * \text{cantEspejo}(w)$

T) $P(xwy) : xwy = \text{invertir}(xwy) \Rightarrow \text{largo}(xwy) = 2 * \text{cantEspejo}(xwy)$

Dem.

Debemos demostrar que $\text{largo}(xwy) = 2 * \text{cantEspejo}(xwy)$, suponiendo **H** y $xwy = \text{invertir}(xwy)$ (antecedente de **T**).

Como suponemos que se cumple $xwy = \text{invertir}(xwy)$, por definición $xwy = y\text{invertir}(w)x$. La única forma de que esto se cumpla es que $w = \text{invertir}(w)$ y $x = y$ (1).

Ahora, si tenemos que $w = \text{invertir}(w)$ nos encontramos en las hipótesis de **H**, por lo tanto podemos afirmar que se cumple que $\text{largo}(w) = 2 * \text{cantEspejo}(w)$ (2).

$$\begin{aligned} & \text{largo}(xwy) \\ &= (\text{def. de largo}) \\ & 2 + \text{largo}(w) \\ &= \text{por (2)} \\ & 2 + 2 * \text{cantEspejo}(w) \\ &= \text{Aritmetica} \\ & 2 * (\text{cantEspejo}(w) + 1) \\ &= \text{por (1) } (x = y) \text{ y def de cantEspejo} \\ & 2 * \text{cantEspejo}(xwy) \end{aligned}$$

Con esto demostramos que $\text{largo}(xwy) = 2 * \text{cantEspejo}(xwy)$.

■

Por lo tanto, por estar en las hipótesis del PIP de A , se cumple la propiedad pedida por la aplicación de dicho principio.



Ejercicio 2 (25 puntos)

Sea un lenguaje de primer orden con tipo de similaridad $\langle 1; 2; 1 \rangle$ con símbolo de predicado P , símbolo de función f y símbolo de constante c .
 Considere las fórmulas:

$$\varphi_1 = (\forall x)P(f(x, c))$$

$$\varphi_2 = (\forall x)f(x, c) = ' c$$

- Sea $M_1 = \langle \mathbb{N}, Par, *, n \rangle$. Determine el valor de n para que $M_1 \models \varphi_1 \wedge \varphi_2$.
- Determine si existe m tal que $M_2 = \langle \mathbb{N}, Par, *, m \rangle$ modela $\varphi_1 \wedge \neg \varphi_2$.
- Demuestre que $\not\models \varphi_1 \rightarrow P(y)$

Propuesta de solución

Dadas:

$$\varphi_1 = (\forall x)P(f(x, c))$$

$$\varphi_2 = (\forall x)f(x, c) = ' c$$

$$a. M_1 = \langle \mathbb{N}, Par, *, n \rangle$$

$$M_1 \models \varphi_1 \wedge \varphi_2$$

$$\Leftrightarrow (\text{def. de } \varphi_1 \text{ y } \varphi_2)$$

$$M_1 \models (\forall x)P(f(x, c)) \wedge (\forall x)f(x, c) = ' c$$

$$\Leftrightarrow (2.4.5)$$

$$M_1 \models (\forall x)P(f(x, c)) \text{ y } M_1 \models (\forall x)f(x, c) = ' c$$



$$M_1 \models (\forall x)f(x, c) = ' c$$

$$\Leftrightarrow (2.4.5)$$

$$(\forall k \in \mathbb{N}) M_1 \models f(\bar{k}, c) = ' c$$

$$\Leftrightarrow (\text{Def. de } \models)$$

$$(\forall k \in \mathbb{N}) v^{M_1}(f(\bar{k}, c) = ' c) = 1$$

$$\Leftrightarrow (\text{Def. de } v^{M_1} \text{ y de } M_1)$$

$$(\forall k \in \mathbb{N}) k * n = n$$

Para que se cumpla esta propiedad n debe ser igual a cero.

Verifiquemos si $M_1 = \langle \mathbb{N}, Par, *, 0 \rangle$ modela φ_1

$$M_1 \models (\forall x)P(f(x, c))$$

$$\Leftrightarrow (2.4.5)$$

$$(\forall k \in \mathbb{N}) M_1 \models P(f(\bar{k}, c))$$

$$\Leftrightarrow (\text{Def. de } \models)$$

$$(\forall k \in \mathbb{N}) v^{M_1}(P(f(\bar{k}, c))) = 1$$

$$\Leftrightarrow (\text{Def. de } v^{M_1} \text{ y de } M_1)$$

$$(\forall k \in \mathbb{N}) Par(k * 0)$$

Y esta propiedad se cumple, por lo tanto el valor de n debe ser 0.

b. $M_2 = \langle \mathbb{N}, Par, *, m \rangle$

$$M_2 \models \varphi_1 \wedge \neg \varphi_2$$

$$\Leftrightarrow (\text{def. de } \varphi_1 \text{ y } \varphi_2)$$

$$M_2 \models (\forall x)P(f(x, c)) \wedge \neg(\forall x)f(x, c) = 'c$$

$$\Leftrightarrow (2.4.5)$$

$$M_2 \models (\forall x)P(f(x, c)) \text{ y } M_2 \models \neg(\forall x)f(x, c) = 'c$$

- Por lo visto en la parte anterior para que $M_2 \models (\forall x)P(f(x, c))$ se debe cumplir que $(\forall k \in \mathbb{N})Par(k * m)$ Para esto alcanza con que m sea cualquier natural par.

$$M_2 \models \neg(\forall x)f(x, c) = 'c$$

$$\Leftrightarrow (2.4.5)$$

$$M_2 \not\models (\forall x)f(x, c) = 'c$$

$$\Leftrightarrow (\text{contrareciproco 2.4.5})$$

$$(\exists k \in \mathbb{N})M_2 \not\models f(k, c) = 'c$$

$$\Leftrightarrow (\text{Def. de } \models)$$

$$(\exists k \in \mathbb{N})v^{M_2}(f(k, c) = 'c) = 0$$

$$\Leftrightarrow (\text{Def. de } v^{M_2} \text{ y de } M_2)$$

$$(\exists k \in \mathbb{N})k * m \neq m$$

Para que esta propiedad m debe ser cualquier natural distinto de 0.

Una posible solución para M_2 es $M_2 = \langle \mathbb{N}, Par, *, 2 \rangle$

c. $\not\models \varphi_1 \rightarrow P(y)$

$$\not\models \varphi_1 \rightarrow P(y) \Leftrightarrow (\exists M : \text{eta}) M \not\models \varphi_1 \rightarrow P(y)$$

$$M \not\models \varphi_1 \rightarrow P(y)$$

$$\Leftrightarrow (\text{def. de } \varphi_1)$$

$$M \not\models (\forall x)P(f(x, c)) \rightarrow P(y)$$

$$\Leftrightarrow (\text{clausura})$$

$$M \not\models (\forall y)((\forall x)P(f(x, c)) \rightarrow P(y))$$

$$\Leftrightarrow (\text{contrareciproco 2.4.5})$$

$$(\exists a \in \mathbb{N})M \not\models (\forall x)P(f(x, c)) \rightarrow P(a)$$

$$\Leftrightarrow (\text{contrareciproco 2.4.5})$$

$$(\exists a \in \mathbb{N})(M \models (\forall x)P(f(x, c)) \text{ y } M \not\models P(a))$$

$$\Leftrightarrow (\text{Def. de } \models)$$

$$(\exists a \in \mathbb{N})(M \models (\forall x)P(f(x, c)) \text{ y } v^M(P(a)) = 0)$$

- Sea $M = M_1$ y $a = 1$.

Por la parte anterior sabemos que $M_1 \models (\forall x)P(f(x, c))$ y además que $1 \notin Par$, por lo que queda demostrado que: $\not\models \varphi_1 \rightarrow P(y)$

Ejercicio 3 (25 puntos)

Construya derivaciones que justifiquen los siguientes juicios:

a. $(p \wedge \neg r) \rightarrow \neg q \vdash (p \wedge q) \rightarrow r$

b. $(\forall x)(\forall y)(\forall z)(R(z, x) \wedge R(z, y) \rightarrow x = 'y), \neg c_1 = 'c_2 \vdash \neg(\exists w)(\forall x)R(w, x)$

Nota: En ningún caso se aceptan justificaciones semánticas.

Propuesta de solución

a. $(p \wedge \neg r) \rightarrow \neg q \vdash (p \wedge q) \rightarrow r$

$$\frac{\frac{\frac{[p \wedge q]^{(1)}}{p} E\wedge \quad \frac{[\neg r]^{(2)}}{\neg r} E\wedge}{p \wedge \neg r} I\wedge \quad \frac{[p \wedge q]^{(1)}}{q} E\wedge}{\frac{p \wedge \neg r \rightarrow \neg q}{\neg q} E\rightarrow \quad \frac{q}{E\neg}} \frac{\perp}{\frac{r}{RAA_2}} I\rightarrow_1$$

b. $(\forall x)(\forall y)(\forall z)(R(z, x) \wedge R(z, y) \rightarrow x = y), \neg c_1 = c_2 \vdash \neg(\exists w)(\forall x)R(w, x)$

$$\frac{\frac{\frac{\frac{(\forall x)(\forall y)(\forall z)(R(z, x) \wedge R(z, y) \rightarrow x = y)}{(\forall y)(\forall z)(R(z, c_1) \wedge R(z, y) \rightarrow c_1 = y)} E\forall^{*4} \quad \frac{[(\forall x)R(w, x)]^{(2)}}{R(w, c_1)} E\forall^{*5} \quad \frac{[(\forall x)R(w, x)]^{(2)}}{R(w, c_2)} E\forall^{*6}}{\frac{(\forall z)(R(z, c_1) \wedge R(z, c_2) \rightarrow c_1 = c_2)}{R(w, c_1) \wedge R(w, c_2) \rightarrow c_1 = c_2} E\forall^{*3} \quad \frac{R(w, c_1)}{R(w, c_1) \wedge R(w, c_2)} E\wedge \quad \frac{R(w, c_2)}{E\rightarrow}} \frac{\neg c_1 = c_2}{c_1 = c_2} E\neg \quad \frac{[(\exists w)(\forall x)R(w, x)]^{(1)}}{\perp} E\exists^{*1} \quad \frac{\perp}{\neg(\exists w)(\forall x)R(w, x)} I\neg_1$$

*1) La eliminación del existe es correcta porque:

$$w \notin FV(\{\perp, \neg c_1 = c_2, (\forall x)(\forall y)(\forall z)(R(z, x) \wedge R(z, y) \rightarrow x = y)\}).$$

*2) La eliminación del para todo es correcta porque w está libre para z en $(R(z, c_1) \wedge R(z, c_2) \rightarrow c_1 = c_2)$.

*3) La eliminación del para todo es correcta porque c_2 está libre para y en $(\forall z)(R(z, c_1) \wedge R(z, y) \rightarrow c_1 = y)$.

*4) La eliminación del para todo es correcta porque c_1 está libre para x en $(\forall y)(\forall z)(R(z, x) \wedge R(z, y) \rightarrow x = y)$.

*5) La eliminación del para todo es correcta porque c_1 está libre para x en $R(w, x)$.

*6) La eliminación del para todo es correcta porque c_2 está libre para x en $R(w, x)$.

Ejercicio 4 (25 puntos)

Sea un lenguaje de primer orden con tipo de similaridad $\langle 1; 1; 1 \rangle$ con símbolo de predicado P , símbolo de función f y símbolo de constante c . Considere las fórmulas:

$$\begin{aligned} \alpha &= (\forall x)(P(x) \rightarrow f(x) = x) \\ \beta &= (\exists x)P(f(x)) \\ \gamma &= P(c) \end{aligned}$$

Puede asumir sin demostrar que se cumple:

$$\vdash \alpha \wedge \gamma \rightarrow \beta$$

Indique si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas. Justifique:



- a. $\{\alpha, \beta, \gamma\}$ es consistente.
- b. $Th(Mod(\{\alpha, \beta\}))$ es consistente maximal.
- c. $Mod(\{\alpha, \gamma\}) \subseteq Mod(\beta)$.

Propuesta de solución

A partir de asumir que se cumple $\vdash \alpha \wedge \gamma \rightarrow \beta$, podemos realizar la siguiente deducción:

$$\begin{aligned}
 & \vdash \alpha \wedge \gamma \rightarrow \beta \\
 & \Leftrightarrow \text{Corrección y Completitud} \\
 & \models \alpha \wedge \gamma \rightarrow \beta \\
 & \Leftrightarrow (\text{def. de } \models) \\
 & (\forall \mathcal{M} \text{ e.t.a}) \mathcal{M} \models \alpha \wedge \gamma \rightarrow \beta \\
 & \Leftrightarrow 2.4.5. (\text{Sentencias}) \\
 & (\forall \mathcal{M} \text{ e.t.a}) \mathcal{M} \models \alpha \wedge \gamma \Rightarrow \mathcal{M} \models \beta \\
 & \Leftrightarrow 2.4.5. \\
 & (\forall \mathcal{M} \text{ e.t.a}) \mathcal{M} \models \alpha \text{ y } \mathcal{M} \models \gamma \Rightarrow \mathcal{M} \models \beta (*)
 \end{aligned}$$

(*) En otras palabras, toda estructura que modela a α y γ , modela a β .

- a. $\{\alpha, \beta, \gamma\}$ es consistente. **VERDADERA**

Para demostrar esto basta con encontrar una estructura que modele al conjunto de fórmulas $\{\alpha, \beta, \gamma\}$. Y por (*) cualquier estructura que modele a α y γ , modela a β .

Sea $\mathcal{M}_1 = \langle \{\bullet\}, \{\bullet\}, id, \bullet \rangle$, veamos que $\mathcal{M}_1 \models \{\alpha, \gamma\}$.

$$\begin{aligned}
 & \mathcal{M}_1 \models \alpha \\
 & \Leftrightarrow (\text{def. de } \alpha) \\
 & \mathcal{M}_1 \models (\forall x)(P(x) \rightarrow f(x) = 'x) \\
 & \Leftrightarrow (2.4.5 \text{ y sustitución}) \\
 & (\forall a \in \{\bullet\}) \mathcal{M}_1 \models P(\bar{a}) \rightarrow f(\bar{a}) = ' \bar{a} \\
 & \Leftrightarrow (2.4.5) \\
 & (\forall a \in \{\bullet\}) (\mathcal{M}_1 \models P(\bar{a}) \Rightarrow \mathcal{M}_1 \models f(\bar{a}) = ' \bar{a}) \\
 & \Leftrightarrow (\text{def. } \models \text{ e interpretación}) \\
 & (\forall a \in \{\bullet\}) (a \in \{\bullet\} \Rightarrow id(a) = a) \\
 & \text{y esto se cumple por definición de la función identidad.}
 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
 & \mathcal{M}_1 \models \gamma \\
 & \Leftrightarrow (\text{def. de } \gamma) \\
 & \mathcal{M}_1 \models P(c) \\
 & \Leftrightarrow (\text{def. } \models \text{ e interpretación}) \\
 & \bullet \in \{\bullet\} \\
 & \text{lo que se cumple trivialmente.}
 \end{aligned}$$

Por lo tanto, encontramos una estructura $\mathcal{M}_1$ que cumple: $\mathcal{M}_1 \models \{\alpha, \gamma\}$. Y por (*) $\mathcal{M}_1 \models \beta$. Entonces el conjunto $\{\alpha, \beta, \gamma\}$ es consistente.

- b. $Th(Mod(\{\alpha, \beta\}))$ es consistente maximal. **FALSA**

Por la parte a. el conjunto $\{\alpha, \beta, \gamma\}$ es consistente. En particular $\mathcal{M}_1 \models \{\alpha, \beta\}$, por lo tanto $\mathcal{M}_1 \models CONS(\{\alpha, \beta\})$ y esto es equivalente a $\mathcal{M}_1 \models Th(Mod(\{\alpha, \beta\}))$ (**). Entonces $Th(Mod(\{\alpha, \beta\}))$ es consistente.

Falta ver que no es **maximal**. Para esto podemos agregar una fórmula que no pertenezca al conjunto y ver que este sigue siendo consistente. Por ejemplo, tomemos γ y, en primer lugar, veamos que no pertenece a $Th(Mod(\{\alpha, \beta\}))$.

Para verificar que $\gamma \notin Th(Mod(\{\alpha, \beta\}))$ basta con probar que existe una estructura $\mathcal{M}_2$ que cumple $\mathcal{M}_2 \in Mod(\{\alpha, \beta\})$ y $\mathcal{M}_2 \not\models \gamma$. Sea $\mathcal{M}_2 = \langle \{\bullet, \circ\}, \{\bullet\}, id, \circ \rangle$, veamos que $\mathcal{M}_2 \models \{\alpha, \beta\}$ y $\mathcal{M}_2 \not\models \gamma$.

$$\begin{aligned}
 & \mathcal{M}_2 \models \alpha \\
 & \Leftrightarrow (\text{def. de } \alpha) \\
 & \mathcal{M}_2 \models (\forall x)(P(x) \rightarrow f(x) = x) \\
 & \Leftrightarrow (2.4.5 \text{ y sustitución}) \\
 & (\forall a \in \{\bullet, \circ\}) \mathcal{M}_2 \models P(a) \rightarrow f(a) = a \\
 & \Leftrightarrow (2.4.5) \\
 & (\forall a \in \{\bullet, \circ\}) (\mathcal{M}_2 \models P(a) \Rightarrow \mathcal{M}_2 \models f(a) = a) \\
 & \Leftrightarrow (\text{def. } \models \text{ e interpretación}) \\
 & (\forall a \in \{\bullet, \circ\}) (a \in \{\bullet\} \Rightarrow id(a) = a)
 \end{aligned}$$

Esto último se cumple por definición de la función identidad.

$$\begin{aligned}
 & \mathcal{M}_2 \models \beta \\
 & \Leftrightarrow (\text{def. de } \beta) \\
 & \mathcal{M}_2 \models (\exists x)P(f(x)) \\
 & \Leftrightarrow (2.4.5 \text{ y sustitución}) \\
 & (\exists a \in \{\bullet, \circ\}) \mathcal{M}_2 \models P(f(a)) \\
 & \Leftrightarrow (2.4.5 \text{ e interpretación}) \\
 & (\exists a \in \{\bullet, \circ\}) id(a) \in \{\bullet\}
 \end{aligned}$$



Tomando el testigo del existe como $a = \bullet$ se cumple que $id(\bullet) = \bullet \in \{\bullet\}$.

$$\begin{aligned}
 & \mathcal{M}_2 \not\models \gamma \\
 & \Leftrightarrow (\text{def. de } \gamma) \\
 & \mathcal{M}_2 \not\models P(c) \\
 & \Leftrightarrow (\text{def. } \not\models \text{ e interpretación}) \\
 & \circ \notin \{\bullet\}
 \end{aligned}$$

Lo último se cumple trivialmente por teoría de conjuntos.

Ahora falta ver que $Th(Mod(\{\alpha, \beta\})) \cup \{\gamma\}$ es consistente. Esto se cumple por parte a. donde vimos que $\mathcal{M}_1 \models \gamma$ y (***) que $\mathcal{M}_1 \models Th(Mod(\{\alpha, \beta\}))$. Entonces existe $\mathcal{M}_1$, tal que $\mathcal{M}_1 \models Th(Mod(\{\alpha, \beta\})) \cup \{\gamma\}$

c. $Mod(\{\alpha, \gamma\}) \subseteq Mod(\beta)$. **VERDADERA**

Por letra sabemos que se cumple $\vdash \alpha \wedge \gamma \rightarrow \beta$, entonces:

7/8



$\vdash \alpha \wedge \gamma \rightarrow \beta$
 $\Rightarrow$ (corrección)
 $\models \alpha \wedge \gamma \rightarrow \beta$
 $\Rightarrow$ (def. de $\models$)
 $(\forall \mathcal{M} \text{ e.t.a}) \mathcal{M} \models \alpha \wedge \gamma \rightarrow \beta$
 $\Rightarrow$ (2.4.5)
 $(\forall \mathcal{M} \text{ e.t.a}) (\mathcal{M} \models \alpha \text{ y } \mathcal{M} \models \gamma \Rightarrow \mathcal{M} \models \beta)$
 $\Rightarrow$ (def. Mod)
 $(\forall \mathcal{M} \text{ e.t.a}) (\mathcal{M} \in Mod(\{\alpha, \gamma\}) \Rightarrow \mathcal{M} \in Mod(\beta))$
 $\Rightarrow$ (teo. conjuntos)
 $Mod(\{\alpha, \gamma\}) \subseteq Mod(\beta)$

que es lo que se quería demostrar.

8/8