

Examen de Lógica

2 de agosto de 2024



Indicaciones generales

- Apagar los celulares.
- La duración del examen es de **tres (3) horas**.
- En esta prueba **no** se permite consultar material alguno.
- **Toda respuesta debe estar fundamentada.** Pueden usarse los resultados que aparecen en el texto del curso, en esos casos debe describirse con precisión el enunciado que se utiliza.
- Numerar todas las hojas e incluir en cada una su nombre y cédula de identidad, utilizar las hojas de un solo lado, escribir con lápiz, iniciar cada ejercicio en hoja nueva y poner en la primera hoja la cantidad de hojas entregadas.

Ejercicio 1(25 puntos)

a. Defina inductivamente el conjunto $\mathcal{LN}$ de las listas, no vacías, de naturales usando el símbolo $|$ como separador. Ej:

- 12 es una lista que tiene 1 elemento: el 12.
- $1|5|18$ es una lista que tiene 3 elementos: 1, 5, 18.

b. Defina una función $\text{sust} : \mathcal{LN} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathcal{LN}$ tal que dada una lista l y un natural k , devuelve el resultado de sustituir en l todos los elementos menores que k por el natural k . Ejemplo:

- $\text{sust}(12, 1) = 12$.
- $\text{sust}(1|5|18, 10) = 10|10|18$.

c. Demuestre por inducción que para cualquier natural k mayor que cero y lista $l \in \mathcal{LN}$, se cumple que

$$\text{suma}(\text{sust}(l, k)) \geq k * \text{largo}(l)$$

siendo suma y largo las funciones que suman los elementos y cuentan el largo de una lista.

Propuesta de solución

- a. i Si $n \in \mathbb{N}$ entonces $n \in \mathcal{LN}$
ii Si $n \in \mathbb{N}$ y $l \in \mathcal{LN}$ entonces $n|l \in \mathcal{LN}$
- b.

$$\begin{aligned} \text{sust} : \mathcal{LN} \times \mathbb{N} &\rightarrow \mathcal{LN} \\ \text{sust}(n, k) &= \text{si } n < k \text{ entonces } k \text{ sino } n \\ \text{sust}(n|l, k) &= \text{si } n < k \text{ entonces } k|\text{sust}(l, k) \text{ sino } n|\text{sust}(l, k) \end{aligned}$$

OTRA DEFINICION

$$\begin{aligned} \text{sust} : \mathcal{LN} \times \mathbb{N} &\rightarrow \mathcal{LN} \\ \text{sust}(n|l, k) &= m \end{aligned}$$

1/8



donde $m = k$ si $n < k$ sino $m = n$

$$\text{sust}(n, k) = m | \text{sust}(l, k)$$

donde $m = k$ si $n < k$ sino $m = n$

Nota: Observar que dada $l \in \mathcal{LN}$ y $k \in \mathbb{N}$ todos los elementos de $\text{sust}(l, k)$ son mayores o iguales a k .

c. $(\forall k > 0)(\forall l \in \mathcal{LN}) \text{suma}(\text{sust}(l, k)) \geq k * \text{largo}(l)$

siendo suma y largo las siguientes funciones:

$$\text{suma} : \mathcal{LN} \rightarrow \mathbb{N}$$

$$\text{suma}(n) = n$$

$$\text{suma}(n | l) = n + \text{suma}(l)$$

$$\text{largo} : \mathcal{LN} \rightarrow \mathbb{N}$$

$$\text{largo}(n) = 1$$

$$\text{largo}(n | l) = 1 + \text{largo}(l)$$

Sea $k \in \mathbb{N}, k > 0$ se probará:

$$(\forall l \in \mathcal{LN}) \text{suma}(\text{sust}(l, k)) \geq k * \text{largo}(l)$$

usando el PIP para $\mathcal{LN}$. Identificación de la propiedad:

$$P(l) := \text{suma}(\text{sust}(l, k)) \geq k * \text{largo}(l)$$

Paso Base

T) $P(n) : \text{suma}(\text{sust}(n, k)) \geq k * \text{largo}(n)$

Demo)

1) $n < k$

$$\text{suma}(\text{sust}(n, k))$$

$$= (\text{def. de sust})$$

$$\text{suma}(k)$$

$$= (\text{def. de suma})$$

$$k$$

$$\geq (\text{aritmética})$$

$$k * 1$$

$$= (\text{def. de largo})$$

$$k * \text{largo}(n)$$

$$2) n \geq k$$

$$\begin{aligned} & \text{suma}(\text{sust}(n, k)) \\ &= (\text{def. de sust}) \\ & \text{suma}(n) \\ &= (\text{def. de suma}) \\ & n \\ & \geq (2)) \\ & k \\ &= (\text{aritmética}) \\ & k * 1 \\ &= (\text{def. de largo}) \\ & k * \text{largo}(n) \end{aligned}$$



Paso Inductivo

$$H) P(l) : \text{suma}(\text{sust}(l, k)) \geq k * \text{largo}(l)$$

$$T) P(n|l) : \text{suma}(\text{sust}(n|l, k)) \geq k * \text{largo}(n|l)$$

Demo)

$$1) n < k$$

$$\begin{aligned} & \text{suma}(\text{sust}(n|l, k)) \\ &= (\text{def. de sust}) \\ & \text{suma}(k | \text{sust}(l, k)) \\ &= (\text{def. de suma}) \\ & k + \text{suma}(\text{sust}(l, k)) \\ & \geq (\text{HIP}) \\ & k + k * \text{largo}(l) \\ &= (\text{aritmética}) \\ & k * (1 + \text{largo}(l)) \\ &= (\text{def. de largo}) \\ & k * \text{largo}(n|l) \end{aligned}$$

$$2) n \geq k$$

$$\begin{aligned} & \text{suma}(\text{sust}(n|l, k)) \\ &= (\text{def. de sust}) \\ & \text{suma}(n | \text{sust}(l, k)) \\ &= (\text{def. de suma}) \\ & n + \text{suma}(\text{sust}(l, k)) \\ & \geq (2)) \\ & k + \text{suma}(\text{sust}(l, k)) \\ & \geq (\text{HIP}) \\ & k + k * \text{largo}(l) \\ &= (\text{aritmética}) \\ & k * (1 + \text{largo}(l)) \\ &= (\text{def. de largo}) \\ & k * \text{largo}(n|l) \end{aligned}$$

OTRA PRUEBA

Paso Base

$$T) P(n) : \text{suma}(\text{sust}(n, k)) \geq k * \text{largo}(n)$$

Demo)

$$\begin{aligned}
 & \text{suma}(\text{sust}(n, k)) \\
 &= (\text{def. de sust}) \\
 & \text{suma}(m) \\
 &= (\text{def. de suma}) \\
 & m \\
 & \geq (\text{Obs. def. sust}) \\
 & k \\
 & \geq (\text{aritmética}) \\
 & k * 1 \\
 &= (\text{def. de largo}) \\
 & k * \text{largo}(n)
 \end{aligned}$$



Paso Inductivo

$$H) P(l) : \text{suma}(\text{sust}(l, k)) \geq k * \text{largo}(l).$$

$$T) P(n|l) : \text{suma}(\text{sust}(n|l, k)) \geq k * \text{largo}(n|l)$$

Demo)

$$\begin{aligned}
 & \text{suma}(\text{sust}(n|l, k)) \\
 &= (\text{def. de sust}) \\
 & \text{suma}(m|\text{sust}(l, k)) \\
 &= (\text{def. de suma}) \\
 & m + \text{suma}(\text{sust}(l, k)) \\
 & \geq (\text{Obs. sust}) \\
 & k + \text{suma}(\text{sust}(l, k)) \\
 & \geq (\text{HIP}) \\
 & k + k * \text{largo}(l) \\
 &= (\text{aritmética}) \\
 & k * (1 + \text{largo}(l)) \\
 &= (\text{def. de largo}) \\
 & k * \text{largo}(n|l)
 \end{aligned}$$

Como nos encontramos bajo las hipótesis del PIP para $\mathcal{LN}$, podemos afirmar que

$$(\forall l \in \mathcal{LN}) \text{suma}(\text{sust}(l, k)) \geq k * \text{largo}(l)$$

y como k es cualquier natural mayor que cero se cumple la propiedad pedida.

Ejercicio 2 (25 puntos)

Sea un lenguaje de primer orden con igualdad, con tipo de similaridad $\langle 1; 1; 0 \rangle$, con símbolo de predicado P y símbolo de función f , y las siguientes fórmulas:

- $\varphi := P(x)$
- $\psi := (\forall x) f(x) = 'x$

Para cada una de las siguientes afirmaciones indique si son verdaderas o falsas. Justifique su respuesta.

2 de agosto de 2024

(Handwritten signature and number 4)

- a. $(\exists \mathcal{M}_1 : eta)(M_1 \not\models \varphi \text{ y } M_1 \models \varphi \rightarrow \psi)$
 b. $(\forall \mathcal{M} : eta)(\text{Si } \mathcal{M} \not\models \varphi \text{ entonces } \mathcal{M} \models \varphi \rightarrow \psi)$
 c. $(\exists \mathcal{M}_2 : eta)(M_2 \models \varphi \rightarrow \psi \text{ y } M_2 \models \neg \psi)$

Propuesta de solución



- a. **VERDADERA** - Sea $M = \langle U, R, F \rangle$

$$\begin{aligned}
 &M \not\models \varphi \\
 &\Leftrightarrow (\text{def. } \varphi) \\
 &M \not\models P(x) \\
 &\Leftrightarrow (\text{cl}) \\
 &M \not\models (\forall x)P(x) \\
 &\Leftrightarrow (\text{contrareciproco 2.4.5.}) \\
 &(\exists a \in |\mathcal{M}|) \mathcal{M} \not\models P(\bar{a}) \\
 &\Leftrightarrow (\text{def. } \models \text{ y } v^M) \\
 &(\exists a \in |\mathcal{M}|) a \notin R \\
 &(I)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &M \not\models \varphi \rightarrow \psi \\
 &\Leftrightarrow (\text{def. } \varphi \text{ y } \psi) \\
 &M \not\models P(x) \rightarrow (\forall x)f(x) = 'x \\
 &\Leftrightarrow (\text{cl}) \\
 &M \not\models (\forall x)(P(x) \rightarrow (\forall x)f(x) = 'x) \\
 &\Leftrightarrow (\text{contrareciproco 2.4.5.}) \\
 &(\exists a \in |\mathcal{M}|) \mathcal{M} \not\models (P(\bar{a}) \rightarrow (\forall x)f(x) = 'x) \\
 &\Leftrightarrow (\text{contrareciproco 2.4.5.}) \\
 &(\exists a \in |\mathcal{M}|) (\mathcal{M} \models P(\bar{a}) \text{ y } \mathcal{M} \not\models (\forall x)f(x) = 'x) \\
 &\Leftrightarrow (\text{contrareciproco 2.4.5.}) \\
 &(\exists a \in |\mathcal{M}|) (\mathcal{M} \models P(\bar{a}) \text{ y } (\exists b \in |\mathcal{M}|) \mathcal{M} \not\models f(\bar{b}) = 'b) \\
 &\Leftrightarrow (\text{def. } \models \text{ y } v^M) \\
 &(\exists a \in |\mathcal{M}|) (a \in R \text{ y } (\exists b \in |\mathcal{M}|) F(b) \neq b) \\
 &(II)
 \end{aligned}$$

Sea $\mathcal{M}_1 = \langle \{\bullet, \circ\}, \{\circ\}, \circ \rangle$

- $\mathcal{M}_1$ cumple *I* alcanza con tomar $a = \bullet$
- $\mathcal{M}_1$ cumple *II* alcanza con tomar $a = \circ$ y $b = \bullet$

- b. **FALSA**

Al negar la parte propuesta se obtiene la parte a) que es VERDADERA por lo tanto esta afirmación es FALSA.



- c. VERDADERA - Sea $\mathcal{M} = \langle U, R, F \rangle$
- $$M \models \neg\psi$$
- $$\Leftrightarrow (\text{def. } \psi)$$
- $$M \models \neg(\forall x)f(x) = 'x$$
- $$\Leftrightarrow (\text{contrareciproco 2.4.5.})$$
- $$(\exists a \in |\mathcal{M}|) \mathcal{M} \not\models f(\bar{a}) = 'a$$
- $$\Leftrightarrow (\text{def. } \neq \text{ y } v^M)$$
- $$(\exists a \in |\mathcal{M}|) F(a) \neq a$$
- (III)

Sea $\mathcal{M}_2 = \mathcal{M}_1$ dada en ?? En esa parte ya se probó que $\mathcal{M}_1 \not\models \varphi \rightarrow \psi$ por lo tanto $\mathcal{M}_2 \not\models \varphi \rightarrow \psi$

- $\mathcal{M}_2$ cumple III alcanza con tomar $a = \bullet$

Por lo tanto $\mathcal{M}_2 \models \neg\psi$

Ejercicio 3 (25 puntos)

Construya derivaciones que justifiquen los siguientes juicios:

- a. $\vdash (\forall x)(P(c) \rightarrow P(x)) \leftrightarrow (\neg P(c) \vee (\forall x)P(x))$
 b. $(\exists x)(\forall y)f(x) = 'y \vdash (\forall z)(\forall y)z = 'y$

Nota: En ningún caso se aceptan justificaciones semánticas.

Propuesta de solución

a.

$$\begin{array}{c}
 \frac{[(\forall x)(P(c) \rightarrow P(x))]^1}{P(c) \rightarrow P(x)} EV(*_2) \quad \frac{[\neg(\neg P(c) \vee (\forall x)P(x))]^2}{\neg P(c)} \frac{[\neg P(c)]^3}{\neg P(c)} IV \quad \frac{[\neg P(c)]^3}{\neg P(c)} E\rightarrow \\
 \frac{P(x)}{(\forall x)P(x)} IV(*_1) \quad \frac{\perp}{P(c)} RAA^3 \quad \frac{[\neg P(c)]^5 [P(c)]^4}{\neg P(c)} E\rightarrow \quad \frac{[\neg P(c)]^5 [P(c)]^4}{\neg P(c)} E\rightarrow \quad \frac{[(\forall x)P(x)]^5}{P(x)} EV(*_4) \\
 \frac{[\neg(\neg P(c) \vee (\forall x)P(x))]^2}{\neg P(c) \vee (\forall x)P(x)} IV \quad \frac{P(x)}{P(c)} I\rightarrow^4 \quad \frac{P(c) \rightarrow P(x)}{(\forall x)(P(c) \rightarrow P(x))} IV(*_3) \\
 \frac{\perp}{\neg P(c) \vee (\forall x)P(x)} RAA^2 \quad \frac{(\forall x)(P(c) \rightarrow P(x)) \leftrightarrow (\neg P(c) \vee (\forall x)P(x))}{I \leftrightarrow^1}
 \end{array}$$

- (*₁) $x \notin FV((\forall x)(P(c) \rightarrow P(x)), \neg(\neg P(c) \vee (\forall x)P(x)))$
 (*₂) x libre para x en $P(c) \rightarrow P(x)$
 (*₃) $x \notin FV(\neg P(c) \vee (\forall x)P(x))$
 (*₄) x libre para x en $P(x)$

b.

6/8

$$\begin{array}{c}
\frac{[(\forall y)f(x) = 'y]^1}{f(x) = 'z} E\forall(*_4) \quad \frac{[(\forall y)f(x) = 'y]^1}{f(x) = 'y} E\forall(*_5) \\
\frac{f(x) = 'z}{z = 'f(x)} RI2 \quad \frac{f(x) = 'y}{f(x) = 'y} RI3 \\
\frac{(\exists x)(\forall y)f(x) = 'y}{z = 'y} E\exists(*_3) \\
\frac{z = 'y}{(\forall y)z = 'y} I\forall(*_2) \\
\frac{(\forall y)z = 'y}{(\forall z)(\forall y)z = 'y} I\forall(*_1)
\end{array}$$

(*₁) $z \notin FV((\exists x)(\forall y)f(x) = 'y)$

(*₂) $y \notin FV((\exists x)(\forall y)f(x) = 'y)$

(*₃) $x \notin FV(z = 'y)$

(*₄) z libre para y en $f(x) = 'y$

(*₅) y libre para y en $f(x) = 'y$



Ejercicio 4 (25 puntos)

Indique cuales de las siguientes afirmaciones son verdaderas. Justifique.

- Existe $\Gamma \subseteq \text{PROP}$, teoría y no consistente
- Existe $\Gamma \subseteq \text{PROP}$, completo y no teoría.
- Existe $\Gamma \subseteq \text{PROP}$, teoría y no completo
- Existe $\Gamma \subseteq \text{PROP}$, completo y no consistente maximal.

Recuerde que un conjunto Γ es completo si y sólo si es consistente y para toda $\varphi \in \text{PROP}$ se cumple que: $\Gamma \vdash \varphi$ o $\Gamma \vdash \neg\varphi$.

Propuesta de solución

- a. Verdadero.

Consideramos $\Gamma := \text{PROP}$.

- PROP es teoría ya que $\text{CONS}(\text{PROP}) = \text{PROP}$
- PROP es inconsistente porque $\perp \in \text{PROP}$ y por lo tanto $\text{PROP} \vdash \perp$

- b. Verdadero.

Consideramos $\Gamma := \mathcal{P}$ (donde $\mathcal{P}$ es el conjunto de todas las letras proposicionales.)

- Γ es completo porque existe una única valuación v tal que $v(\mathcal{P}) = 1$. (caracterización semántica de completo).
- Γ no es teoría ya que $\neg\perp$ se deriva de Γ y $\neg\perp \notin \Gamma$.

- c. Verdadero.

Consideramos $\Gamma = \text{CONS}(\emptyset)$.

- Γ es teoría por construcción (definido por CONS).

7/8

- Γ no es completo ya que no hay una única **valuación** que le asigne 1. En particular, toda valuación v cumple $v(\Gamma) = 1$, ya que $\text{CONS}(\emptyset) = \{\alpha \in \text{SENT} \mid \models \alpha\}$.

d. Verdadero.

Consideramos el Γ definido en la parte b): $\Gamma := \mathcal{P}$.

- Γ es completo (ver parte b))
- Γ no es consistente maximal.

Por resultado visto en el curso: todo conjunto consistente **maximal** es teoría. En la parte b) vimos que Γ no es teoría.

