

Examen de Lógica

5 de diciembre de 2025

Indicaciones generales

- Apagar los celulares.
- La duración del examen es de **tres (3)** horas.
- En esta prueba **no** se permite consultar material alguno.
- **Toda respuesta debe estar fundamentada.** Pueden usarse los resultados que aparecen en el texto del curso, en esos casos debe describirse con precisión el enunciado que se utiliza.
- Numerar todas las hojas e incluir en cada una su nombre y cédula de identidad, utilizar las hojas de un solo lado, escribir con lápiz, iniciar cada ejercicio en hoja nueva y poner en la primera hoja la cantidad de hojas entregadas.

Ejercicio 1(25 puntos)

Considere el alfabeto $\Sigma = \{1, +, (,)\}$, y el conjunto EXP formado por todas las tiras de Σ^* que representan expresiones bien formadas construidas a partir del símbolo 1 y el operador binario $+$, usando paréntesis para delimitar explícitamente cada operación.

Por ejemplo, los siguientes tiras pertenecen al conjunto EXP : 1, $(1 + 1)$, $(1 + (1 + 1))$. Pero las siguientes no pertenecen al conjunto: $1 + 1$, (1) , $(1 + 1 + 1)$.

- Proponga una definición inductiva que genere precisamente el conjunto EXP .
- Utilizando la definición inductiva que propuso en la parte (a), defina recursivamente las siguientes funciones:
 - $unos : EXP \rightarrow \mathbb{N}$, que cuenta el número de apariciones del símbolo 1.
 - $ops : EXP \rightarrow \mathbb{N}$, que cuenta el número total de operadores $+$.
- Demuestre inductivamente la siguiente propiedad para toda expresión en EXP :

$$(\forall e \in EXP)(unos(e) = ops(e) + 1)$$

- Demuestre o refute (con un contraejemplo) la siguiente afirmación:

$$(\forall e \in EXP)(largo(e) = unos(e) + 2 * ops(e))$$

donde *largo* es la función que cuenta la cantidad de símbolos de un elemento de EXP .

Propuesta de solución

a. $EXP \subseteq \Sigma^*$

i $1 \in EXP$

ii Si $e_1 \in EXP$ y $e_2 \in EXP$, entonces $(e_1 + e_2) \in EXP$

(jdcampo: o dejamos solo uno de los operadores para que no quede tan largo)

- (jdcampo: Propongo cambiar los nombres de las funciones por *unos* y *op* o algo así, para que no queden tan largos)



I.

$$\begin{aligned}
 \text{unos} : EXP &\rightarrow \mathbb{N} \\
 \text{unos}(1) &= 1 \\
 \text{unos}((e_1 + e_2)) &= \text{unos}(e_1) + \text{unos}(e_2)
 \end{aligned}$$

II.

$$\begin{aligned}
 \text{ops} : EXP &\rightarrow \mathbb{N} \\
 \text{ops}(1) &= 0 \\
 \text{ops}((e_1 + e_2)) &= 1 + \text{ops}(e_1) + \text{ops}(e_2)
 \end{aligned}$$

c. Probaremos la afirmación utilizando el PIP para EXP , con la propiedad:

$$P(e) := \text{unos}(e) = \text{ops}(e) + 1$$

Paso Base

$$\mathbf{T) } P(1) : \text{unos}(1) = \text{ops}(1) + 1$$

Demo.

$$\begin{aligned}
 \text{unos}(1) &= \text{ops}(1) + 1 \\
 \Leftrightarrow (\text{Def. unos}) \\
 1 &= \text{ops}(1) + 1 \\
 \Leftrightarrow (\text{Def. ops}) \\
 1 &= 0 + 1 \\
 &(\text{lo que se cumple por aritmética})
 \end{aligned}$$

Paso Inductivo

$$\mathbf{HI1) } P(e_1) := \text{unos}(e_1) = \text{ops}(e_1) + 1$$

$$\mathbf{HI2) } P(e_2) := \text{unos}(e_2) = \text{ops}(e_2) + 1$$

$$\mathbf{TI) } P(e_2) := \text{unos}(e_1 + e_2) = \text{ops}(e_1 + e_2) + 1$$

Demo.

$$\begin{aligned}
 \text{unos}(e_1 + e_2) &= \text{ops}(e_1 + e_2) + 1 \\
 \Leftrightarrow (\text{Def. unos}) \\
 \text{unos}(e_1) + \text{unos}(e_2) &= \text{ops}(e_1 + e_2) + 1 \\
 \Leftrightarrow (\text{HI1 y HI2}) \\
 \text{ops}(e_1) + 1 + \text{ops}(e_2) + 1 &= \text{ops}(e_1 + e_2) + 1 \\
 \Leftrightarrow (\text{Aritmética}) \\
 1 + \text{ops}(e_1) + \text{ops}(e_2) &= \text{ops}(e_1 + e_2) \\
 &(\text{lo que se cumple por def. de ops})
 \end{aligned}$$

d. La afirmación es **FALSA**. Un contraejemplo puede ser:

$$e := (1 + 1)$$

En este caso, se cumple:



$$\begin{aligned}
& \text{unos}(e) + 2 * \text{ops}(e) \\
&= (\text{Def. } e) \\
& \text{unos}((1 + 1)) + 2 * \text{ops}((1 + 1)) \\
&= (\text{Def. } \text{unos}) \\
& \text{unos}(1) + \text{unos}(1) + 2 * \text{ops}((1 + 1)) \\
&= (\text{Def. } \text{unos}) \\
& 1 + 1 + 2 * \text{ops}((1 + 1)) \\
&= (\text{Def. } \text{ops}) \\
& 1 + 1 + 2 * (1 + \text{ops}(1) + \text{ops}(1)) \\
&= (\text{Def. } \text{ops}) \\
& 1 + 1 + 2 * (1 + 0 + 0) \\
&= (\text{Aritmética}) \\
& 4
\end{aligned}$$

Pero como $\text{largo}(e) = 5$, la afirmación es **FALSA**.

Ejercicio 2 (25 puntos)

Se considera un lenguaje de primer orden con igualdad con tipo de similaridad $\langle 2; 1; 0 \rangle$, con símbolo de predicado P y símbolo de función f .

Sean las siguientes definiciones:

- $\varphi_1 := P(x, x)$
- $\varphi_2 := (\forall x)(\neg P(x, f(x)) \wedge P(x, f(f(x))))$
- $\Gamma := \{\varphi_1, \varphi_2\}$



- a. Dé una estructura con universo $U_1 = \{\circ, \bullet\}$ que modele Γ . Justifique.
- b. Muestre que la estructura anterior es la única estructura con universo U_1 que modela Γ .
- c. Dé una estructura con universo $U_2 = \{\circ, \bullet, \square\}$ que modele Γ . Justifique.

Propuesta de solución

Sea $\mathcal{M}$ una estructura arbitraria del tipo adecuado. $\mathcal{M} \models \Gamma \Leftrightarrow \mathcal{M} \models \varphi_1$ y $\mathcal{M} \models \varphi_2$. Veamos qué se debe cumplir para que se cumplan cada una de estas condiciones.

$\mathcal{M} \models P(x, x)$	$\mathcal{M} \models (\forall x)(\neg P(x, f(x)) \wedge P(x, f(f(x))))$
$\Leftrightarrow (\text{clausura})$	$\Leftrightarrow (2.4.5)$
$\mathcal{M} \models (\forall x)P(x, x)$	$(\forall \bar{a} \in \mathcal{M})\mathcal{M} \models \neg P(\bar{a}, f(\bar{a})) \wedge P(\bar{a}, f(f(\bar{a})))$
$\Leftrightarrow (2.4.5)$	$\Leftrightarrow (2.4.5)$
$(\forall \bar{a} \in \mathcal{M})\mathcal{M} \models P(\bar{a}, \bar{a})$	$(\forall \bar{a} \in \mathcal{M})(\mathcal{M} \models \neg P(\bar{a}, f(\bar{a})) \text{ y } \mathcal{M} \models P(\bar{a}, f(f(\bar{a}))))$
$\Leftrightarrow (\text{def. } \models)$	$\Leftrightarrow (\text{def. } \models)$
$(\forall \bar{a} \in \mathcal{M})v^{\mathcal{M}}(P(\bar{a}, \bar{a})) = 1$	$(\forall \bar{a} \in \mathcal{M})(v^{\mathcal{M}}(P(\bar{a}, f(\bar{a}))) = 0 \text{ y } v^{\mathcal{M}}(P(\bar{a}, f(f(\bar{a})))) = 1)$
$\Leftrightarrow (\text{def. } v^{\mathcal{M}} \text{ e interpretación de términos en } \mathcal{M})$	$\Leftrightarrow (\text{def. } v^{\mathcal{M}} \text{ e interpretación de términos en } \mathcal{M})$
$(\forall \bar{a} \in \mathcal{M})(a, a) \in P^{\mathcal{M}}(\mathbf{A})$	$(\forall \bar{a} \in \mathcal{M})((a, f(\bar{a}))^{\mathcal{M}} \notin P^{\mathcal{M}} \text{ y } (a, f(f(\bar{a})))^{\mathcal{M}} \in P^{\mathcal{M}})$
	$\Leftrightarrow (\text{distributiva del } \forall)$
	$(\forall \bar{a} \in \mathcal{M})(a, f(\bar{a}))^{\mathcal{M}} \notin P^{\mathcal{M}}(\mathbf{B}) \text{ y }$
	$(\forall \bar{a} \in \mathcal{M})(a, f(f(\bar{a})))^{\mathcal{M}} \in P^{\mathcal{M}}(\mathbf{C})$

a. Dé una estructura con universo $U_1 = \{\circ, \bullet\}$ que modele Γ .

Sea $\mathcal{M}_1 = \langle \{\circ, \bullet\}, \{(\circ, \circ), (\bullet, \bullet)\}, F_1 \rangle$, donde F_1 es la función definida por $F_1(\circ) = \bullet$ y $F_1(\bullet) = \circ$. Probemos que se cumplen las afirmaciones (A), (B) y (C):

$$(\forall a \in |\mathcal{M}_1|)(a, a) \in P^{\mathcal{M}_1}$$

$$\Leftrightarrow (\text{def. de } \mathcal{M}_1)$$

$$(\forall a \in \{\circ, \bullet\})(a, a) \in \{(\circ, \circ), (\bullet, \bullet)\}, \text{ que se cumple}$$

$$(\forall a \in |\mathcal{M}_1|)(a, f(\bar{a})^{\mathcal{M}_1}) \notin P^{\mathcal{M}_1}$$

$$\Leftrightarrow (\text{interpretación de términos en } \mathcal{M}_1 \text{ y def. de } \mathcal{M}_1)$$

$$(\forall a \in \{\circ, \bullet\})(a, F_1(a)) \notin \{(\circ, \circ), (\bullet, \bullet)\}$$

$$\text{Si } a = \circ: (\circ, \bullet) \notin \{(\circ, \circ), (\bullet, \bullet)\}$$

$$\text{Si } a = \bullet: (\bullet, \circ) \notin \{(\circ, \circ), (\bullet, \bullet)\}$$

$$(\forall a \in |\mathcal{M}_1|)(a, f(f(\bar{a}))^{\mathcal{M}_1}) \in P^{\mathcal{M}_1}$$

$$\Leftrightarrow (\text{interpretación de términos en } \mathcal{M}_1 \text{ y def. de } \mathcal{M}_1)$$

$$(\forall a \in \{\circ, \bullet\})(a, F_1(F_1(a))) \in \{(\circ, \circ), (\bullet, \bullet)\}$$

$$\text{Si } a = \circ: (\circ, \circ) \in \{(\circ, \circ), (\bullet, \bullet)\}$$

$$\text{Si } a = \bullet: (\bullet, \bullet) \in \{(\circ, \circ), (\bullet, \bullet)\}$$

b. Muestre que la estructura anterior es la única estructura con universo U_1 que modela Γ .

Las estructuras con universo U_1 son de la forma: $\mathcal{M} = \langle U_1, R, F \rangle$

Veamos que la única función posible es F_1 :

- Si $F(\circ) = \circ$, luego por (A), $(\circ, F(\circ)) \in R$, lo que contradice (B). Entonces se debe cumplir que $F(\circ) = \bullet$.
- Si $F(\bullet) = \bullet$, luego por (A), $(\bullet, F(\bullet)) \in R$, lo que contradice (B). Entonces se debe cumplir que $F(\bullet) = \circ$.

Ahora veamos que R no puede tener otros pares además de $(\circ, \circ)$ y $(\bullet, \bullet)$, que ya sabemos que debe tener por (A):

Supongamos que R tiene algún otro par. Dos posibilidades: $(\circ, \bullet) \in R$ o $(\bullet, \circ) \in R$

- Si $(\circ, \bullet) \in R$, luego por lo anterior, $(\circ, F(\circ))$, lo que contradice (B).
- Si $(\bullet, \circ) \in R$, luego por lo anterior, $(\bullet, F(\bullet))$, lo que contradice (B).

c. Dé una estructura con universo $U_2 = \{\circ, \bullet, \square\}$ que modele Γ .

Sea $\mathcal{M}_2 = \langle \{\circ, \bullet, \square\}, \{(\circ, \circ), (\bullet, \bullet), (\square, \square), (\square, \bullet)\}, F_2 \rangle$, donde F_2 es la función definida por $F_2(\circ) = \bullet$, $F_2(\bullet) = \circ$ y $F_2(\square) = \circ$. Probemos que se cumplen las afirmaciones (A), (B) y (C):



$$(\bar{\forall}a \in |\mathcal{M}_2|)(a, a) \in P^{\mathcal{M}_2}$$

$\Leftrightarrow$ (def. de $\mathcal{M}_2$)

$$(\bar{\forall}a \in \{\circ, \bullet, \square\})(a, a) \in \{(\circ, \circ), (\bullet, \bullet), (\square, \square), (\square, \bullet)\}, \text{ que se cumple}$$

$$(\bar{\forall}a \in |\mathcal{M}_2|)(a, f(\bar{a})^{\mathcal{M}_2}) \notin P^{\mathcal{M}_2}$$

$\Leftrightarrow$ (interpretación de términos en $\mathcal{M}_2$ y def. de $\mathcal{M}_2$)

$$(\bar{\forall}a \in \{\circ, \bullet, \square\})(a, F_2(a)) \notin \{(\circ, \circ), (\bullet, \bullet), (\square, \square), (\square, \bullet)\}$$

$$\text{Si } a = \circ: (\circ, \bullet) \notin \{(\circ, \circ), (\bullet, \bullet), (\square, \square), (\square, \bullet)\}$$

$$\text{Si } a = \bullet: (\bullet, \circ) \notin \{(\circ, \circ), (\bullet, \bullet), (\square, \square), (\square, \bullet)\}$$

$$\text{Si } a = \square: (\square, \circ) \notin \{(\circ, \circ), (\bullet, \bullet), (\square, \square), (\square, \bullet)\}$$

$$(\bar{\forall}a \in |\mathcal{M}_2|)(a, f(f(\bar{a}))^{\mathcal{M}_2}) \in P^{\mathcal{M}_2}$$

$\Leftrightarrow$ (interpretación de términos en $\mathcal{M}_2$ y def. de $\mathcal{M}_2$)

$$(\bar{\forall}a \in \{\circ, \bullet, \square\})(a, F_2(F_2(a))) \in \{(\circ, \circ), (\bullet, \bullet), (\square, \square), (\square, \bullet)\}$$

$$\text{Si } a = \circ: (\circ, \circ) \in \{(\circ, \circ), (\bullet, \bullet), (\square, \square), (\square, \bullet)\}$$

$$\text{Si } a = \bullet: (\bullet, \bullet) \in \{(\circ, \circ), (\bullet, \bullet), (\square, \square), (\square, \bullet)\}$$

$$\text{Si } a = \square: (\square, \bullet) \in \{(\circ, \circ), (\bullet, \bullet), (\square, \square), (\square, \bullet)\}$$



SOLUCIÓN ALTERNATIVA.

Sea $\mathcal{M}_3 = \langle \{\circ, \bullet, \square\}, \{(\circ, \circ), (\bullet, \bullet), (\square, \square), (\circ, \square), (\bullet, \circ), (\square, \bullet)\}, F_3 \rangle$, donde F_3 es la función definida por $F_3(\circ) = \bullet$, $F_3(\bullet) = \square$ y $F_3(\square) = \circ$. Probemos que se cumplen las afirmaciones (A), (B) y (C):

$$(\bar{\forall}a \in |\mathcal{M}_3|)(a, a) \in P^{\mathcal{M}_3}$$

$\Leftrightarrow$ (def. de $\mathcal{M}_3$)

$$(\bar{\forall}a \in \{\circ, \bullet, \square\})(a, a) \in \{(\circ, \circ), (\bullet, \bullet), (\square, \square), (\circ, \square), (\bullet, \circ), (\square, \bullet)\}, \text{ que se cumple}$$

$$(\bar{\forall}a \in |\mathcal{M}_3|)(a, f(\bar{a})^{\mathcal{M}_3}) \notin P^{\mathcal{M}_3}$$

$\Leftrightarrow$ (interpretación de términos en $\mathcal{M}_3$ y def. de $\mathcal{M}_3$)

$$(\bar{\forall}a \in \{\circ, \bullet, \square\})(a, F_3(a)) \notin \{(\circ, \circ), (\bullet, \bullet), (\square, \square), (\circ, \square), (\bullet, \circ), (\square, \bullet)\}$$

$$\text{Si } a = \circ: (\circ, \bullet) \notin \{(\circ, \circ), (\bullet, \bullet), (\square, \square), (\circ, \square), (\bullet, \circ), (\square, \bullet)\}$$

$$\text{Si } a = \bullet: (\bullet, \square) \notin \{(\circ, \circ), (\bullet, \bullet), (\square, \square), (\circ, \square), (\bullet, \circ), (\square, \bullet)\}$$

$$\text{Si } a = \square: (\square, \circ) \notin \{(\circ, \circ), (\bullet, \bullet), (\square, \square), (\circ, \square), (\bullet, \circ), (\square, \bullet)\}$$

$$(\bar{\forall}a \in |\mathcal{M}_3|)(a, f(f(\bar{a}))^{\mathcal{M}_3}) \in P^{\mathcal{M}_3}$$

$\Leftrightarrow$ (interpretación de términos en $\mathcal{M}_3$ y def. de $\mathcal{M}_3$)

$$(\bar{\forall}a \in \{\circ, \bullet, \square\})(a, F_3(F_3(a))) \in \{(\circ, \circ), (\bullet, \bullet), (\square, \square), (\circ, \square), (\bullet, \circ), (\square, \bullet)\}$$

$$\text{Si } a = \circ: (\circ, \square) \in \{(\circ, \circ), (\bullet, \bullet), (\square, \square), (\circ, \square), (\bullet, \circ), (\square, \bullet)\}$$

$$\text{Si } a = \bullet: (\bullet, \circ) \in \{(\circ, \circ), (\bullet, \bullet), (\square, \square), (\circ, \square), (\bullet, \circ), (\square, \bullet)\}$$

$$\text{Si } a = \square: (\square, \bullet) \in \{(\circ, \circ), (\bullet, \bullet), (\square, \square), (\circ, \square), (\bullet, \circ), (\square, \bullet)\}$$

Ejercicio 3 (25 puntos)

Construya derivaciones que prueben los siguientes juicios:

a. $p \rightarrow (q \vee r) \vdash (p \rightarrow q) \vee (p \rightarrow r)$

Nota: En ningún caso se aceptan justificaciones semánticas.

a.

$$\frac{\frac{\frac{[r]^3}{p \rightarrow r} I \rightarrow}{(p \rightarrow q) \vee (p \rightarrow r)} I \vee}{\frac{[\neg((p \rightarrow q) \vee (p \rightarrow r))]^1}{(p \rightarrow q) \vee (p \rightarrow r)} E^-} \frac{\frac{\frac{p \rightarrow (q \vee r) \quad [p]^2}{q \vee r} E \rightarrow \quad \frac{[\neg((p \rightarrow q) \vee (p \rightarrow r))]^1}{[q]^3} \frac{\frac{q}{p \rightarrow q} I \rightarrow (2)}{(p \rightarrow q) \vee (p \rightarrow r)} I \vee}{\frac{\perp}{(p \rightarrow q) \vee (p \rightarrow r)} RAA(4)} E \rightarrow$$

b.

$$\begin{array}{c}
 \frac{(\forall x)(\forall y)(P(x, y) \leftrightarrow f(x) = 'y)}{(\forall y)(P(x, y) \leftrightarrow f(x) = 'y)} \text{E}\forall(*^5) \\
 \frac{(\forall y)(P(x, y) \leftrightarrow f(x) = 'y)}{P(x, y) \leftrightarrow f(x) = 'y} \text{E}\forall(*^4) \\
 \frac{P(x, y) \leftrightarrow f(x) = 'y}{f(x) = 'y} \text{R12} \\
 \frac{y = 'f(x)}{y = 'z} \text{R13} \\
 \frac{y = 'z}{P(x, y) \wedge P(x, z) \rightarrow y = 'z} \text{I}\rightarrow^1 \\
 \frac{P(x, y) \wedge P(x, z) \rightarrow y = 'z}{(\forall z)(P(x, y) \wedge P(x, z) \rightarrow y = 'z)} \text{I}\forall(*^3) \\
 \frac{(\forall z)(P(x, y) \wedge P(x, z) \rightarrow y = 'z)}{(\forall y)(\forall z)(P(x, y) \wedge P(x, z) \rightarrow y = 'z)} \text{I}\forall(*^2) \\
 \frac{(\forall y)(\forall z)(P(x, y) \wedge P(x, z) \rightarrow y = 'z)}{(\forall x)(\forall y)(\forall z)(P(x, y) \wedge P(x, z) \rightarrow y = 'z)} \text{I}\forall(*^1)
 \end{array}$$



- $$\begin{aligned}
(*^1) \quad & x \notin FV((\forall x)(\forall y)(P(x, y) \leftrightarrow f(x) = 'y)) \\
(*^2) \quad & y \notin FV((\forall x)(\forall y)(P(x, y) \leftrightarrow f(x) = 'y)) \\
(*^3) \quad & z \notin FV((\forall x)(\forall y)(P(x, y) \leftrightarrow f(x) = 'y)) \\
(*^4) \quad & y \text{ libre para } y \text{ en } P(x, y) \leftrightarrow f(x) = 'y \\
(*^5) \quad & x \text{ libre para } x \text{ en } (\forall y)(P(x, y) \leftrightarrow f(x) = 'y) \\
(*^6) \quad & z \text{ libre para } y \text{ en } P(x, y) \leftrightarrow f(x) = 'y \\
(*^7) \quad & x \text{ libre para } x \text{ en } (\forall y)(P(x, y) \leftrightarrow f(x) = 'y)
\end{aligned}$$

Considere el conjunto $\Gamma = \{((p_i \rightarrow p_{i+1}) \wedge (\neg p_i \rightarrow \neg p_{i+1})) : i \in \mathbb{N}\}$.

a. Indique cuál de las siguientes afirmaciones es la verdadera y demuéstrela:

- I. Existen infinitas valuaciones que hacen verdadero a Γ .
- II. Existen exactamente dos conjuntos consistentes maximales que incluyen a Γ .
- III. Γ es completo, dado que solamente una valuación lo satisface.

IV. Γ es inconsistente.

b. Indique si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas. Justifique en cada caso.

I. Existe un conjunto Δ_b tal que $\Gamma \cap \Delta_b$ es inconsistente.

II. Existe un conjunto Δ_c tal que $\Gamma \cup \Delta_c$ es completo.

Nota: Recuerde que un conjunto Δ es completo si y solo si Δ es consistente y

$$(\forall \alpha \in \text{PROP})(\Delta \vdash \alpha \text{ o } \Delta \vdash \neg \alpha)$$

Propuesta de solución

a. En primer lugar, estudiamos qué valuaciones satisfacen Γ . Tomamos una fórmula arbitraria de Γ :

$$((p_i \rightarrow p_{i+1}) \wedge (\neg p_i \rightarrow \neg p_{i+1}))$$

Entonces:

$$\begin{aligned} v(((p_i \rightarrow p_{i+1}) \wedge (\neg p_i \rightarrow \neg p_{i+1}))) &= 1 \\ \Leftrightarrow (\text{Equivalencia conocida}) \\ v(((p_i \rightarrow p_{i+1}) \wedge (p_{i+1} \rightarrow p_i))) &= 1 \\ \Leftrightarrow (\text{Equivalencia conocida}) \\ v((p_i \leftrightarrow p_{i+1})) &= 1 \\ \Leftrightarrow (\text{Def. } v) \\ v(p_i) &= v(p_{i+1}) \end{aligned}$$



Es decir, que una valuación v satisface Γ , si para cualquier $i \in \mathbb{N}$, $v(p_i) = v(p_{i+1})$.

Esto significa que **existen exactamente 2 valuaciones que satisfacen Γ** : la que hace 0 a todas las letras proposicionales (la llamamos v_0), y las que las hace 1 (la llamamos v_1).

Por lo tanto, la opción correcta es la II: existen exactamente dos conjuntos consistentes maximales Δ_0 y Δ_1 que incluyen Γ , que son los que quedan determinados por las dos valuaciones que satisfacen Γ :

$$\Delta_0 = \{\varphi \in \text{PROP} \mid v_0(\varphi) = 1\}$$

$$\Delta_1 = \{\varphi \in \text{PROP} \mid v_1(\varphi) = 1\}$$

Ambos conjuntos son consistentes maximales por caracterización semántica (ejercicio 17 del práctico 5) e incluyen a Γ , porque $v_0(\Gamma) = v_1(\Gamma) = 1$.

b. I. Esta afirmación es **FALSA**.

Sabemos por la parte anterior que $v_0(\Gamma) = 1$. Entonces, tomando un Δ_b arbitrario:

$$\begin{aligned}
v_0(\Gamma) &= 1 \\
&\Rightarrow (\text{Def. } v) \\
(\forall \varphi \in \Gamma)(v_0(\varphi) &= 1) \\
&\Rightarrow (\Gamma \cap \Delta_b \subseteq \Gamma) \\
(\forall \varphi \in \Gamma \cap \Delta_b)(v_0(\varphi) &= 1) \\
&\Rightarrow (\text{Def. } v) \\
v_0(\Gamma \cap \Delta_b) &= 1
\end{aligned}$$

Por lo tanto, para cualquier Δ_b que considere, $\Gamma \cap \Delta_b$ es consistente, por lo que la afirmación es FALSA.

II. La afirmación es **VERDADERA**.

Tomo $\Delta_c = \{p_0\}$.

La única valuación que satisface $\Gamma \cup \Delta_c$ es v_1 , la valuación que hace 1 a todas las letras proposicionales:

$$\begin{aligned}
v(\Gamma \cup \Delta_c) &= 1 \\
&\Leftrightarrow (\text{Def. } v) \\
v(\Gamma) = 1 \text{ y } v(\Delta_c) &= 1 \\
&\Leftrightarrow (\text{Def. } \Delta_c) \\
v(\Gamma) = 1 \text{ y } v(p_0) &= 1 \\
&\Leftrightarrow (\text{Parte a.}) \\
(\forall i \in \mathbb{N})(v(p_i) = v(p_{i+1})) \text{ y } v(p_0) &= 1 \\
&\Leftrightarrow (\text{Aritmética}) \\
(\forall i \in \mathbb{N})(v(p_i) &= 1)
\end{aligned}$$



Entonces, por caracterización semántica de completo, $\Gamma \cup \Delta_c$ es completo, y la afirmación es verdadera.

SOLUCIÓN ALTERNATIVA.

Tomo $\Delta_c = \Delta_1$.

Como vimos en la parte a, Δ_1 es consistente maximal e incluye a Γ .

Entonces, $\Gamma \cup \Delta_c = \Delta_1$, que es completo por ser consistente maximal.