

Examen de Lógica

11 de febrero de 2025



Indicaciones generales

- Apagar los celulares.
- La duración del examen es de **tres (3)** horas.
- En esta prueba **no** se permite consultar material alguno.
- **Toda respuesta debe estar fundamentada.** Pueden usarse los resultados que aparecen en el texto del curso, en esos casos debe describirse con precisión el enunciado que se utiliza.
- Numerar todas las hojas e incluir en cada una su nombre y cédula de identidad, utilizar las hojas de un solo lado, escribir con lápiz, iniciar cada ejercicio en hoja nueva y poner en la primera hoja la cantidad de hojas entregadas.

Ejercicio 1(25 puntos)

Considere un alfabeto $\Sigma = \{a, b, c\}$ y el lenguaje $\mathcal{L}$ definido inductivamente por las siguientes reglas:

- i $\epsilon \in \mathcal{L}$
- ii Si $w \in \mathcal{L}$ entonces $baw \in \mathcal{L}$
- iii Si $w \in \mathcal{L}$ entonces $wcb \in \mathcal{L}$

- a. Defina recursivamente la función $\text{cantSimb} : \mathcal{L} \times \Sigma \rightarrow \mathbb{N}$, de forma tal que $\text{cantSimb}(w, x)$ cuenta las ocurrencias del símbolo x en la tira w .

Ejemplos:

- $\text{cantSimb}(babacb, a) = 2$
- $\text{cantSimb}(bach, b) = 2$
- $\text{cantSimb}(bacbcb, c) = 2$

- b. Para cada una de las siguientes afirmaciones indique si es verdadera o falsa. En caso de ser verdadera demuestre inductivamente y en caso de ser falsa de un contraejemplo.

- I. $(\forall w \in \mathcal{L})(\text{cantSimb}(w, a) = \text{cantSimb}(w, b))$
- II. $(\forall w \in \mathcal{L})(\text{cantSimb}(w, b) = 2 \cdot \text{cantSimb}(w, c))$
- III. $(\forall w \in \mathcal{L})(\text{cantSimb}(w, b) = \text{cantSimb}(w, a) + \text{cantSimb}(w, c))$
- IV. $(\forall w \in \mathcal{L})(\text{cantSimb}(w, a) \geq \text{cantSimb}(w, c))$

Propuesta de solución

- a. Defina recursivamente la función $\text{cantSimb} : \mathcal{L} \times \Sigma \rightarrow \mathbb{N}$, de forma tal que $\text{cantSimb}(w, x)$ cuenta las ocurrencias del símbolo x en la tira w .

$$\text{cantSimb}(\epsilon) = 0$$

$$\text{cantSimb}(baw, x) = \text{si } (x = b \text{ or } x = a) \text{ entonces } 1 + \text{cantSimb}(w, x) \text{ sino } \text{cantSimb}(w, x)$$

$$\text{cantSimb}(wcb, x) = \text{si } (x = b \text{ or } x = c) \text{ entonces } 1 + \text{cantSimb}(w, x) \text{ sino } \text{cantSimb}(w, x)$$

b. Para cada una de las siguientes afirmaciones indique si es verdadera o falsa. En caso de ser verdadera demuestre inductivamente y en caso de ser falsa de un contraejemplo.

I. $(\forall w \in \mathcal{L})(\text{cantSimb}(w, a) = \text{cantSimb}(w, b))$ **FALSA**

Contraejemplo: bacb

- $\text{cantSimb}(\text{bacb}, a) = 1$
- $\text{cantSimb}(\text{bacb}, b) = 2$

II. $(\forall w \in \mathcal{L})(\text{cantSimb}(w, b) = 2 \cdot \text{cantSimb}(w, c))$ **FALSA**

Contraejemplo: ba

- $\text{cantSimb}(\text{ba}, b) = 1$
- $\text{cantSimb}(\text{ba}, c) = 0$

III. $(\forall w \in \mathcal{L})(\text{cantSimb}(w, b) = \text{cantSimb}(w, a) + \text{cantSimb}(w, c))$ **VERDADERA**

Se probará usando el PIP para $\mathcal{L}$.

Identificación de la propiedad:

$$P(w) := \text{cantSimb}(w, b) = \text{cantSimb}(w, a) + \text{cantSimb}(w, c)$$

Paso Base

$$\text{T)} P(\epsilon) := \text{cantSimb}(\epsilon, b) = \text{cantSimb}(\epsilon, a) + \text{cantSimb}(\epsilon, c)$$

Demo)

$$\begin{aligned} & \text{cantSimb}(\epsilon, b) \\ &= (\text{def. de cantSimb}) \\ & 0 \\ &= (\text{aritmética}) \\ & 0 + 0 \\ &= (\text{def. de cantSimb}) \\ & \text{cantSimb}(\epsilon, a) + \text{cantSimb}(\epsilon, c) \end{aligned}$$

Paso Inductivo 1

$$\text{H)} P(w) : \text{cantSimb}(w, b) = \text{cantSimb}(w, a) + \text{cantSimb}(w, c)$$

$$\text{T)} P(\text{baw}) : \text{cantSimb}(\text{baw}, b) = \text{cantSimb}(\text{baw}, a) + \text{cantSimb}(\text{baw}, c)$$

Demo)

$$\begin{aligned} & \text{cantSimb}(\text{baw}, b) \\ &= (\text{def. de cantSimb}) \\ & 1 + \text{cantSimb}(w, b) \\ &= (\text{H}) \\ & 1 + \text{cantSimb}(w, a) + \text{cantSimb}(w, c) \\ &= (\text{def. de cantSimb}) \\ & \text{cantSimb}(\text{baw}, a) + \text{cantSimb}(w, c) \\ &= (\text{def. de cantSimb}) \\ & \text{cantSimb}(\text{baw}, a) + \text{cantSimb}(\text{baw}, c) \end{aligned}$$

Paso Inductivo 2

$$\text{H)} P(w) : \text{cantSimb}(w, b) = \text{cantSimb}(w, a) + \text{cantSimb}(w, c)$$

2/9

T) $P(wcb) : cantSimb(wcb, b) = cantSimb(wcb, a) + cantSimb(wcb, c)$
Demo)

$$\begin{aligned}
 & cantSimb(wcb, b) \\
 &= (\text{def. de } cantSimb) \\
 & 1 + cantSimb(w, b) \\
 &= (H) \\
 & 1 + cantSimb(w, a) + cantSimb(w, c) \\
 &= (\text{def. de } cantSimb) \\
 & cantSimb(w, a) + cantSimb(wcb, c) \\
 &= (\text{def. de } cantSimb) \\
 & cantSimb(wcb, a) + cantSimb(wcb, c)
 \end{aligned}$$



Como nos encontramos bajo las hipótesis del PIP para $\mathcal{L}$, podemos afirmar que

$$(\forall w \in \mathcal{L})(cantSimb(w, b) = cantSimb(w, a) + cantSimb(w, c))$$

IV. $(\forall w \in \mathcal{L})(cantSimb(w, a) \geq cantSimb(w, c))$ **FALSA**

Contraejemplo: cb

- $cantSimb(cb, a) = 0$
- $cantSimb(cb, c) = 1$

3/9

Ejercicio 2 (25 puntos)

Se considera un lenguaje de primer orden con igualdad, con tipo de similaridad $\langle -, 1; 0 \rangle$, con símbolo de función f .

Sean las fórmulas:

- $\varphi := (\forall x)(\forall y)(f(x) = y \rightarrow f(y) = x)$
- $\psi := (\forall x)\neg f(x) = x$

Indique si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas. Justifique.

- a. Existe F_1 tal que $M_1 = \langle \{\circ\}, F_1 \rangle$ cumple que $M_1 \models \varphi$ y $M_1 \models \psi$.
- b. Existe F_2 tal que $M_2 = \langle \{\circ, \bullet\}, F_2 \rangle$ cumple que $M_2 \models \varphi$ y $M_2 \models \psi$.
- c. Existe F_3 tal que $M_3 = \langle \{\circ, \bullet, \Delta\}, F_3 \rangle$ cumple que $M_3 \models \varphi$ y $M_3 \models \psi$.
- d. Existe F_4 tal que $M_4 = \langle \{\circ, \bullet, \Delta\}, F_4 \rangle$ cumple que $M_4 \models \varphi$.



Propuesta de solución

Veamos qué debe cumplir una estructura para que sea modelo de φ y ψ . Sea $M = \langle U, F \rangle$ una estructura del tipo adecuado genérica con universo U y función F .

$$\begin{aligned}
 & M \models \varphi \\
 & \Leftrightarrow (\text{Def. de } \varphi) \\
 & M \models (\forall x)(\forall y)(f(x) = y \rightarrow f(y) = x) \\
 & \Leftrightarrow (2.4.5) \\
 & (\forall a \in U)(\forall b \in U) M \models f(\bar{a}) = \bar{b} \rightarrow f(\bar{b}) = \bar{a} \\
 & \Leftrightarrow (2.4.5) \\
 & (\forall a \in U)(\forall b \in U) (M \models f(\bar{a}) = \bar{b} \Rightarrow M \models f(\bar{b}) = \bar{a}) \\
 & \Leftrightarrow (\text{Def. de } \models) \\
 & (\forall a \in U)(\forall b \in U) (v^M(f(\bar{a}) = \bar{b}) = 1 \Rightarrow v^M(f(\bar{b}) = \bar{a}) = 1) \\
 & \Leftrightarrow (\text{Def. de } M \text{ y } v^M) \\
 & (\forall a \in U)(\forall b \in U) (F(a) = b \Rightarrow F(b) = a) \quad (\mathbf{A})
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & M \models \psi \\
 & \Leftrightarrow (\text{Def. de } \psi) \\
 & M \models (\forall x)\neg f(x) = x \\
 & \Leftrightarrow (2.4.5) \\
 & (\forall a \in U) M \models \neg f(\bar{a}) = \bar{a} \\
 & \Leftrightarrow (2.4.5) \\
 & (\forall a \in U) M \not\models f(\bar{a}) = \bar{a} \\
 & \Leftrightarrow (\text{Def. de } \models) \\
 & (\forall a \in U) v^M(f(\bar{a}) = \bar{a}) = 0 \\
 & \Leftrightarrow (\text{Def. de } M \text{ y } v^M) \\
 & (\forall a \in U) F(a) \neq a \quad (\mathbf{B})
 \end{aligned}$$

- a. Existe F_1 tal que $M_1 = \langle \{\circ\}, F_1 \rangle$ cumple que $M_1 \models \varphi$ y $M_1 \models \psi$. **FALSA**

Observamos que la estructura tiene un solo elemento, por lo que F_1 solamente puede ser la función identidad. Esta función no cumple con (B), por lo que $M_1 \not\models \psi$.

4/9

- b. Existe F_2 tal que $M_2 = \langle \{o, \bullet\}, F_2 \rangle$ cumple que $M_2 \models \varphi$ y $M_2 \models \psi$. **VERDADERA**

Sea $F_2 : \{o, \bullet\} \rightarrow \{o, \bullet\}$ tal que $F_2(o) = \bullet$ y $F_2(\bullet) = o$.

Veamos que $M_2 \models \varphi$.

$$\begin{aligned} M_2 \models \varphi \\ \Leftrightarrow ((A)) \\ (\forall a \in \{o, \bullet\})(\forall b \in \{o, \bullet\})(F_2(a) = b \Rightarrow F_2(b) = a) \end{aligned}$$

- Si $a = b$, no se cumple el antecedente, por lo que se cumple el implica.
- Si $a \neq b$, como $F_2(o) = \bullet$ y $F_2(\bullet) = o$, se cumple el implica.

Veamos que $M_2 \models \psi$.

$$\begin{aligned} M_2 \models \psi \\ \Leftrightarrow ((B)) \\ (\forall a \in \{o, \bullet\}) F_2(a) \neq a \end{aligned}$$



Se cumple por la definición de F_2 .

- c. Existe F_3 tal que $M_3 = \langle \{o, \bullet, \Delta\}, F_3 \rangle$ cumple que $M_3 \models \varphi$ y $M_3 \models \psi$. **FALSA**

Supongamos que existe F_3 que cumple las condiciones y realicemos un análisis de casos según el valor de $F_3(o)$.

- Si $F_3(o) = o$, no se cumple (B).
- Si $F_3(o) = \bullet$, por (A), $F_3(\bullet) = o$. Luego:
 - Si $F_3(\Delta) = \Delta$, no se cumple (B).
 - Si $F_3(\Delta) = o$, por (A), $F_3(o) = \Delta$, lo que contradice $F_3(o) = \bullet$.
 - Si $F_3(\Delta) = \bullet$, por (A), $F_3(\bullet) = \Delta$, lo que contradice $F_3(\bullet) = o$.
- Si $F_3(o) = \Delta$, por (B), $F_3(\Delta) = o$. Luego:
 - Si $F_3(\bullet) = \bullet$, no se cumple (B).
 - Si $F_3(\bullet) = o$, por (A), $F_3(o) = \bullet$, lo que contradice $F_3(o) = \Delta$.
 - Si $F_3(\bullet) = \Delta$, por (A), $F_3(\Delta) = \bullet$, lo que contradice $F_3(\Delta) = o$.

Como todos los casos llevan a una contradicción, no existe F_3 que cumpla con las condiciones.

- d. Existe F_4 tal que $M_4 = \langle \{o, \bullet, \Delta\}, F_4 \rangle$ cumple que $M_4 \models \varphi$. **VERDADERA**

Sea F_4 la función identidad.

Veamos que $M_4 \models \varphi$.

$$\begin{aligned} M_4 \models \varphi, \\ \Leftrightarrow ((A)) \\ (\forall a \in \{o, \bullet, \Delta\})(\forall b \in \{o, \bullet, \Delta\})(F_4(a) = b \Rightarrow F_4(b) = a) \end{aligned}$$

- Si $a = b$, $F_4(a) = a = b = F_4(b)$ por lo que se cumple el implica.
- Si $a \neq b$, como F_4 es la función identidad no se cumple el antecedente, por lo que se cumple el implica.

Ejercicio 3 (25 puntos)

Construya derivaciones que justifiquen los siguientes juicios:

a. $\vdash (\alpha \leftrightarrow \neg\beta) \rightarrow (\neg(\alpha \wedge \beta) \wedge (\alpha \vee \beta))$

b. $(\forall x)f(x) = 'g(x) \vdash \neg(\exists x)(\neg f(g(x)) = 'f(x) \wedge f(x) = 'x)$

Nota: En ningún caso se aceptan justificaciones semánticas.

Propuesta de solución

a.



$$\begin{array}{c}
 \frac{[\alpha \leftrightarrow \neg\beta]^1}{\neg\beta} E \leftrightarrow \quad \frac{[\alpha \wedge \beta]^2}{\alpha} E \wedge \quad \frac{[\alpha \wedge \beta]^2}{\beta} E \wedge \quad \frac{[\neg(\alpha \vee \beta)]^3}{\neg(\alpha \vee \beta)} E \neg \quad \frac{[\neg\alpha]^5}{\alpha} E \neg \quad \frac{[\neg\beta]^4}{\neg\beta} E \leftrightarrow \\
 \frac{\perp}{\neg(\alpha \wedge \beta)} I \neg(2) \quad \frac{\perp}{\alpha \vee \beta} RAA(3) \quad \frac{\perp}{\beta} RAA(4) \quad \frac{\perp}{\alpha \vee \beta} IV \\
 \frac{(\neg(\alpha \wedge \beta) \wedge (\alpha \vee \beta))}{(\alpha \leftrightarrow \neg\beta) \rightarrow (\neg(\alpha \wedge \beta) \wedge (\alpha \vee \beta))} I \rightarrow (1)
 \end{array}$$

b.

$$\begin{array}{c}
 \frac{(\forall x)f(x) = 'g(x)}{f(x) = 'g(x)} EV^* \quad \frac{[\neg f(g(x)) = 'f(x) \wedge f(x) = 'x]^2}{f(x) = 'x} E \wedge \quad \frac{[\neg f(g(x)) = 'f(x) \wedge f(x) = 'x]^2}{\neg f(g(x)) = 'f(x)} E \wedge \\
 \frac{f(x) = 'g(x)}{g(x) = 'f(x)} RI2 \quad \frac{f(x) = 'x}{\neg f(x) = 'f(x)} RI3 \quad \frac{\neg f(g(x)) = 'f(x)}{f(x) = 'f(x)} RI4^{**} \quad \frac{f(x) = 'f(x)}{f(x) = 'f(x)} RI1 \\
 \frac{[(\exists x)(\neg f(g(x)) = 'f(x) \wedge f(x) = 'x)]^1}{\perp} E \exists(2)^{***} \\
 \frac{\perp}{\neg(\exists x)(\neg f(g(x)) = 'f(x) \wedge f(x) = 'x)} I \neg(1)
 \end{array}$$

(*) x libre para x en $f(x) = 'g(x)$

(**) $g(x)$ y x libres para z en $\neg f(z) = 'f(x) \wedge f(x) = 'x$

(***) $x \notin FV(\{\perp, (\forall x)f(x) = 'g(x)\})$

Ejercicio 4 (25 puntos)

Sea un lenguaje de primer orden con tipo de similitud $\langle 2, 1; -, 0 \rangle$, con símbolos de predicado P y Q . Considere las siguientes fórmulas:

$$\begin{aligned}
 \varphi &:= (\forall x)P(x, x) \\
 \psi &:= (\forall y)(\exists x)P(x, y)
 \end{aligned}$$

Demuestre las siguientes afirmaciones:

6/9

- a. $Mod(\varphi) \cap Mod(\psi) \neq \emptyset$.
- b. $(\exists M)M \notin Mod(\varphi) \cup Mod(\psi)$.
- c. El conjunto $CONS(\varphi)$ no es consistente maximal.

Propuesta de solución

Primero verificaremos qué debe cumplir una estructura $M = \langle U, R_1, R_2 \rangle$ para modelar cada fórmula.

$$\begin{aligned}
 M &\models \varphi \\
 &\Leftrightarrow (\text{Def. de } \varphi) \\
 M &\models (\forall x)P(x, x) \\
 &\Leftrightarrow (2.4.5) \\
 (\forall a \in U)M &\models P(\bar{a}, \bar{a}) \\
 &\Leftrightarrow (\text{Def. de } M \text{ y } \models) \\
 (\forall a \in U)(a, a) &\in R_1 \quad (\text{A})
 \end{aligned}$$

Para ψ :

$$\begin{aligned}
 M &\models \psi \\
 &\Leftrightarrow (\text{Def. de } \psi) \\
 M &\models (\forall y)(\exists x)P(x, y) \\
 &\Leftrightarrow (2.4.5) \\
 (\forall a \in U)M &\models (\exists x)P(x, \bar{a}) \\
 &\Leftrightarrow (2.4.5) \\
 (\forall a \in U)(\exists b \in U)M &\models P(\bar{b}, \bar{a}) \\
 &\Leftrightarrow (\text{Def. de } M \text{ y } \models) \\
 (\forall a \in U)(\exists b \in U)(b, a) &\in R_1 \quad (\text{B})
 \end{aligned}$$

- a. Sea $M_a = \langle \{o\}, \{(o, o)\}, \{o\} \rangle$. Para esta estructura se cumple:

$$\begin{aligned}
 (o, o) &\in \{(o, o)\} \\
 &\Rightarrow (\text{Def. de } M_a) \\
 (\forall a \in \{o\})(a, a) &\in \{(o, o)\} \\
 &\Rightarrow (\text{A}) \\
 M_a &\models \varphi \\
 &\Rightarrow (\text{Def. de } Mod) \\
 M_a &\in Mod(\varphi)
 \end{aligned}$$

Por otra parte:

$$\begin{aligned}
 (o, o) &\in \{(o, o)\} \\
 &\Rightarrow (\text{Def. de } M_a) \\
 (\forall a \in \{o\})(o, a) &\in \{(o, o)\} \\
 &\Rightarrow (\text{Def. de } M_a, \text{ tomando } b = o \text{ como testigo}) \\
 (\forall a \in \{o\})(\exists b \in \{o\})(b, a) &\in \{(o, o)\} \\
 &\Rightarrow (\text{B}) \\
 M_a &\models \psi \\
 &\Rightarrow (\text{Def. de } Mod) \\
 M_a &\in Mod(\psi)
 \end{aligned}$$

Por lo tanto, $Mod(\varphi) \cap Mod(\psi) \neq \emptyset$, ya que M_a pertenece a la intersección.



b. Sea $M_b = \langle \{o\}, \emptyset, \emptyset \rangle$. Para esta estructura se cumple:

$$\begin{aligned}
 & (o, o) \notin \emptyset \\
 & \Rightarrow (\text{Def. de } M_b, \text{ tomando } a = o) \\
 & (\exists a \in \{o\})(a, a) \notin \emptyset \\
 & \Rightarrow (\mathbf{A}) \\
 & M \not\models \varphi \\
 & \Rightarrow (\text{Def. de } Mod) \\
 & M_b \notin Mod(\varphi)
 \end{aligned}$$

Por otra parte:

$$\begin{aligned}
 & (o, o) \notin \emptyset \\
 & \Rightarrow (\text{Def. de } M_b) \\
 & (\forall b \in \{o\})(b, o) \notin \emptyset \\
 & \Rightarrow (\text{Def. de } M_b, \text{ tomando } a = o) \\
 & (\exists a \in \{o\})(\forall b \in \{o\})(b, a) \notin \emptyset \\
 & \Rightarrow (\text{Contrareciproco de } (\mathbf{B})) \\
 & M \not\models \psi \\
 & \Rightarrow (\text{Def. de } Mod) \\
 & M_b \notin Mod(\psi)
 \end{aligned}$$

Por lo tanto $M_b \notin Mod(\varphi) \cup Mod(\psi)$.

c. El conjunto $CONS(\varphi)$ es consistente maximal si y sólo si es consistente y

$$(\bar{\forall} \alpha \in SENT)(\alpha \notin CONS(\varphi) \Rightarrow CONS(\varphi) \cup \{\alpha\} \vdash \perp)$$

Sea $\alpha = (\forall x)Q(x)$. Para que una estructura $M = \langle U, R_1, R_2 \rangle$ modele α , debe cumplir:

$$\begin{aligned}
 & M \models \alpha \\
 & \Leftrightarrow (\text{Def. de } \alpha) \\
 & M \models (\forall x)Q(x) \\
 & \Leftrightarrow (2.4.5) \\
 & (\bar{\forall} a \in U)M \models Q(\bar{a}) \\
 & \Leftrightarrow (\text{Def. de } M \text{ y } \models) \\
 & (\bar{\forall} a \in U)a \in R_2 \quad (\mathbf{C})
 \end{aligned}$$

Consideremos ahora $M_c = \langle \{o\}, \{(o, o)\}, \emptyset \rangle$. Por un lado:

$$\begin{aligned}
 & (o, o) \in \{(o, o)\} \\
 & \Rightarrow (\text{Def. de } M_c) \\
 & (\bar{\forall} a \in \{o\})(a, a) \in \{(o, o)\} \\
 & \Rightarrow (\mathbf{A}) \\
 & M_c \models \varphi
 \end{aligned}$$

Por otra parte:

$\circ \notin \emptyset$
 $\Rightarrow$ (Def. de M_c , tomando $a = \circ$)
 $(\exists a \in \{\circ\}) a \notin \emptyset$
 $\Rightarrow$ (C)
 $M_c \not\models \alpha$
 $\Rightarrow (M_c \models \varphi)$
 $(\exists M)(M \models \varphi \text{ y } M \not\models \alpha)$
 $\Rightarrow$ (Def. $\models$)
 $\varphi \not\models \alpha$
 $\Rightarrow$ (Corrección)
 $\varphi \not\models \alpha$
 $\Rightarrow$ (Def. de CONS)
 $\alpha \notin \text{CONS}(\varphi)$



Si consideramos la estructura M_a , en la parte a mostramos que $M_a \models \varphi$, por lo tanto (por corrección), $M_a \models \text{CONS}(\varphi)$. Además:

$\circ \in \{\circ\}$
 $\Rightarrow$ (Def. de M_a)
 $(\forall a \in \{\circ\}) a \in \{\circ\}$
 $\Rightarrow$ (C)
 $M_a \models \alpha$
 $\Rightarrow (M_a \models \text{CONS}(\varphi))$
 $M_a \models \text{CONS}(\varphi) \cup \{\alpha\}$
 $\Rightarrow$ (Def. de consistencia)
 $\text{CONS}(\varphi) \cup \{\alpha\} \not\models \perp$

Como encontramos una sentencia α que no pertenece a $\text{CONS}(\varphi)$ pero tal que el conjunto $\text{CONS}(\varphi) \cup \{\alpha\}$ es consistente, queda demostrado que $\text{CONS}(\varphi)$ no es consistente maximal.