

Examen de Lógica

29 de julio de 2025

Indicaciones generales

- Apagar los celulares.
- La duración del examen es de tres (3) horas.
- En esta prueba **no** se permite consultar material alguno.
- **Toda respuesta debe estar fundamentada.** Pueden usarse los resultados que aparecen en el texto del curso, en esos casos debe describirse con precisión el enunciado que se utiliza.
- Iniciar cada ejercicio en hoja nueva y entregar los ejercicios en el orden que aparecen en la letra.
- Numerar todas las hojas e incluir en cada una su nombre y cédula de identidad, utilizar las hojas de un solo lado, escribir con lápiz, y poner en la primera hoja la cantidad de hojas entregadas.

Ejercicio 1(25 puntos)

Consideramos el conjunto $\text{PROP}_{\{\wedge, \rightarrow, \perp\}} \subset \text{PROP}$ de proposiciones construidas con los conectivos $\{\wedge, \rightarrow, \perp\}$ (es decir, sin utilizar $\{\leftrightarrow, \neg, \vee\}$).

Considere la función $f : \text{PROP} \rightarrow \text{PROP}_{\{\wedge, \rightarrow, \perp\}}$ definida como:

$$\begin{aligned} F(p_i) &= p_i \\ F(\perp) &= \perp \\ F(\neg \alpha) &= F(\alpha) \rightarrow \perp \\ F(\alpha \wedge \beta) &= F(\alpha) \wedge F(\beta) \\ F(\alpha \vee \beta) &= ((F(\alpha) \rightarrow \perp) \wedge (F(\beta) \rightarrow \perp)) \rightarrow \perp \\ F(\alpha \rightarrow \beta) &= F(\alpha) \rightarrow F(\beta) \\ F(\alpha \leftrightarrow \beta) &= (F(\alpha) \rightarrow F(\beta)) \wedge (F(\beta) \rightarrow F(\alpha)) \end{aligned}$$



- a. Considere la siguiente propiedad, que indica que F preserva la semántica:

$$(\forall \alpha \in \text{PROP}) \alpha \text{ eq } F(\alpha)$$

- I. Dé la estructura de la prueba inductiva de la propiedad anterior. Debe incluir todos los pasos con sus respectivas hipótesis y tesis. No incluir las demostraciones.
 - II. Demuestre TODOS los pasos bases y SOLO los pasos inductivos correspondientes a los conectivos $\neg$, $\vee$ y $\wedge$ de la prueba anterior.
- b. Defina inductivamente el conjunto $\text{PROP}_{\{\vee, \rightarrow, \neg\}} \subset \text{PROP}$, el conjunto de fórmulas de PROP en las que sólo aparecen los conectivos $\vee$, $\rightarrow$ y $\neg$.
- c. Defina una función $G : \text{PROP} \rightarrow \text{PROP}_{\{\vee, \rightarrow, \neg\}}$ que preserve la semántica. No es necesario demostrarlo.

Propuesta de solución

- a. I. Recordemos que $\alpha \text{ eq } \beta$ cuando para cualquier valuación v se cumple $v(\alpha) = v(\beta)$.
Fijada una valuación arbitraria v , debemos probar por inducción en α que:

$$(\forall \alpha \in \text{PROP}) \ v(F(\alpha)) = v(\alpha)$$

Identificación de la propiedad.

$$P(\alpha) := v(F(\alpha)) = v(\alpha)$$

Paso Base 1

T) $P(p_i) : v(F(p_i)) = v(p_i)$

Paso Base 2

T) $P(\perp) : v(F(\perp)) = v(\perp)$

Paso Inductivo 1

H) $P(\alpha) : v(F(\alpha)) = v(\alpha)$

T) $P(\neg \alpha) : v(F(\neg \alpha)) = v(\neg \alpha)$

Paso Inductivo 2

H1) $P(\alpha) : v(F(\alpha)) = v(\alpha)$

H2) $P(\beta) : v(F(\beta)) = v(\beta)$

T) $P(\alpha \wedge \beta) : v(F(\alpha \wedge \beta)) = v(\alpha \wedge \beta)$

Paso Inductivo 3

H1) $P(\alpha) : v(F(\alpha)) = v(\alpha)$

H2) $P(\beta) : v(F(\beta)) = v(\beta)$

T) $P(\alpha \vee \beta) : v(F(\alpha \vee \beta)) = v(\alpha \vee \beta)$

Paso Inductivo 4

H1) $P(\alpha) : v(F(\alpha)) = v(\alpha)$

H2) $P(\beta) : v(F(\beta)) = v(\beta)$

T) $P(\alpha \rightarrow \beta) : v(F(\alpha \rightarrow \beta)) = v(\alpha \rightarrow \beta)$

Paso Inductivo 5

H1) $P(\alpha) : v(F(\alpha)) = v(\alpha)$

H2) $P(\beta) : v(F(\beta)) = v(\beta)$

T) $P(\alpha \leftrightarrow \beta) : v(F(\alpha \leftrightarrow \beta)) = v(\alpha \leftrightarrow \beta)$



II. Utilizaremos el siguiente resultado:

Lema Dada una valuación v y una fórmula α , $v(\alpha \rightarrow \perp) = 1 - v(\alpha)$.

Dem.

$$\begin{aligned}
 &v(\alpha \rightarrow \perp) \\
 &= (\text{def. de } v) \\
 &\text{máx}\{1 - v(\alpha), v(\perp)\} \\
 &= (\text{def. de } v) \\
 &\text{máx}\{1 - v(\alpha), 0\} \\
 &= (\text{aritmética}) \\
 &1 - v(\alpha)
 \end{aligned}$$

■

A continuación probaremos los casos pedidos en la letra:

Paso Base 1

T) $P(p_i) : v(F(p_i)) = v(p_i)$

Dem.

$$\begin{aligned}
 &v(F(p_i)) \\
 &= (\text{def. de } F) \\
 &v(p_i)
 \end{aligned}$$

■

Paso Base 2

T) $P(\perp) : v(F(\perp)) = v(\perp)$

Dem.

$$\begin{aligned}
 &v(F(\perp)) \\
 &= (\text{def. de } F) \\
 &v(\perp)
 \end{aligned}$$

■

Paso Inductivo 1

H) $P(\alpha) : v(F(\alpha)) = v(\alpha)$

T) $P(\neg\alpha) : v(F(\neg\alpha)) = v(\neg\alpha)$

Dem.

$$\begin{aligned}
 &v(F(\neg\alpha)) \\
 &= (\text{def. de } F) \\
 &v(F(\alpha) \rightarrow \perp) \\
 &= (\text{Lema}) \\
 &1 - v(F(\alpha)) \\
 &= (\text{H}) \\
 &1 - v(\alpha) \\
 &= (\text{def. de } v) \\
 &v(\neg\alpha)
 \end{aligned}$$



3/10

■

Paso Inductivo 2

H1) $P(\alpha) : v(F(\alpha)) = v(\alpha)$

H2) $P(\beta) : v(F(\beta)) = v(\beta)$

T) $P(\alpha \wedge \beta) : v(F(\alpha \wedge \beta)) = v(\alpha \wedge \beta)$

Dem.

$$\begin{aligned}
 & v(F(\alpha \wedge \beta)) \\
 &= (\text{def. de } F) \\
 & v(F(\alpha) \wedge F(\beta)) \\
 &= (\text{def. de } v) \\
 & \min\{v(F(\alpha)), v(F(\beta))\} \\
 &= (\mathbf{H1}, \mathbf{H2}) \\
 & \min\{v(\alpha), v(\beta)\} \\
 &= (\text{def. de } v) \\
 & v(\alpha \wedge \beta)
 \end{aligned}$$

■

Paso Inductivo 3

H1) $P(\alpha) : v(F(\alpha)) = v(\alpha)$

H2) $P(\beta) : v(F(\beta)) = v(\beta)$

T) $P(\alpha \vee \beta) : v(F(\alpha \vee \beta)) = v(\alpha \vee \beta)$

Dem.

$$\begin{aligned}
 & v(F(\alpha \vee \beta)) \\
 &= (\text{def. de } F) \\
 & v(((F(\alpha) \rightarrow \perp) \wedge (F(\beta) \rightarrow \perp)) \rightarrow \perp) \\
 &= (\text{Lema}) \\
 & 1 - v((F(\alpha) \rightarrow \perp) \wedge (F(\beta) \rightarrow \perp)) \\
 &= (\text{def. de } v) \\
 & 1 - \min\{v(F(\alpha) \rightarrow \perp), v(F(\beta) \rightarrow \perp)\} \\
 &= (\text{Lema}) \\
 & 1 - \min\{1 - v(F(\alpha)), 1 - v(F(\beta))\} \\
 &= (\mathbf{H1}, \mathbf{H2}) \\
 & 1 - \min\{1 - v(\alpha), 1 - v(\beta)\} \\
 &= (\text{aritmética}) \\
 & \max\{v(\alpha), v(\beta)\} \\
 &= (\text{def. de } v) \\
 & v(\alpha \vee \beta)
 \end{aligned}$$



b. Utilizamos el alfabeto Σ_{PROP} , siendo P el conjunto de letras proposicionales.

- i) Si $p \in P$ entonces $p \in \text{PROP}_{\{\vee, \rightarrow, \neg\}}$.
- ii) Si $\alpha \in \text{PROP}_{\{\vee, \rightarrow, \neg\}}$ y $\beta \in \text{PROP}_{\{\vee, \rightarrow, \neg\}}$, entonces $(\alpha \vee \beta) \in \text{PROP}_{\{\vee, \rightarrow, \neg\}}$.
- iii) Si $\alpha \in \text{PROP}_{\{\vee, \rightarrow, \neg\}}$ y $\beta \in \text{PROP}_{\{\vee, \rightarrow, \neg\}}$, entonces $(\alpha \rightarrow \beta) \in \text{PROP}_{\{\vee, \rightarrow, \neg\}}$.
- iv) Si $\alpha \in \text{PROP}_{\{\vee, \rightarrow, \neg\}}$, $(\neg \alpha) \in \text{PROP}_{\{\vee, \rightarrow, \neg\}}$.

4/10

c.

$$F(p_i) = p_i$$

$$F(\perp) = \neg(p_0 \rightarrow p_0)$$

$$F(\neg\alpha) = F(\alpha) \rightarrow \perp$$

$$F(\alpha \wedge \beta) = \neg(\neg F(\alpha) \vee \neg F(\beta))$$

$$F(\alpha \vee \beta) = F(\alpha) \vee F(\beta)$$

$$F(\alpha \rightarrow \beta) = F(\alpha) \rightarrow F(\beta)$$

$$F(\alpha \leftrightarrow \beta) = \neg(\neg(F(\alpha) \rightarrow F(\beta)) \vee \neg(F(\beta) \rightarrow F(\alpha)))$$



Ejercicio 2 (25 puntos)

Considere φ y ψ dos fórmulas de PROP, y una valuación v_1 tal que $v_1(\varphi) = v_1(\psi) = 0$. Sean:

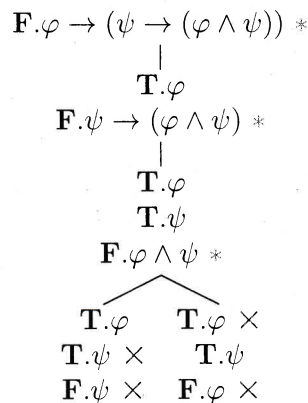
- $\varphi_1 := \varphi \rightarrow (\psi \rightarrow (\varphi \wedge \psi))$
- $\varphi_2 := \varphi \vee \psi$
- $\varphi_3 := (\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow \psi$

- a. Demuestre que $\models \varphi_1$.
- b. Determine si $\varphi_2 \models \varphi_3$. Justifique su respuesta.
- c. Sea $\Gamma = \{\varphi_1, \varphi_2\}$
 - I. Demuestre que $\Gamma \models \varphi_3$.
 - II. Determine si $(\exists \alpha \in \Gamma) \alpha \not\models \varphi_3$. Justifique su respuesta.



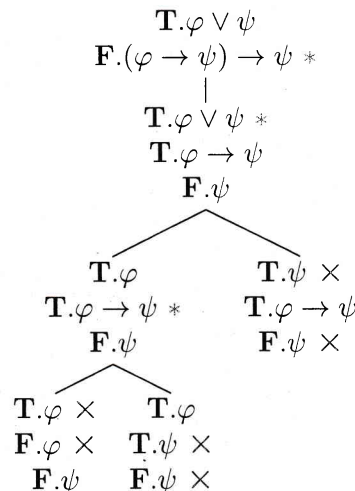
Propuesta de solución

- a. Usaremos un tableau semántico para determinar si $\models \varphi_1$ se cumple.



Como en todas las ramas hay contradicciones, no existen valuaciones que hagan falso a φ_1 por lo tanto se cumple que $(\forall v : val)(v(\varphi_1) = 1)$ y entonces $\models \varphi_1$

- b. Usaremos un tableau semántico para determinar si $\varphi_2 \models \varphi_3$



Como en todas las ramas hay contradicciones, no existen valuaciones que hagan verdadero a φ_2 y falso a φ_3 por lo tanto se cumple que $(\forall v : val)(v(\varphi_2) = 1 \Rightarrow v(\varphi_3) = 1)$ y entonces $\varphi_2 \models \varphi_3$

- c. I. Por parte b. sabemos que $\varphi_2 \models \varphi_3$, lo que es lo mismo que $(\forall v : val)(v(\varphi_2) = 1 \Rightarrow v(\varphi_3) = 1)$.
 Sea v una valuación cualquiera tal que $v(\varphi_2) = 1$, por parte a. $v(\varphi_1) = 1$.
 Por lo anterior se cumple que $(\forall v : val)((v(\varphi_1) = 1 \text{ y } v(\varphi_2) = 1) \Rightarrow v(\varphi_3) = 1)$, por lo tanto $\Gamma \models \varphi_3$.
- II. Por parte a. $(\forall v : val)(v(\varphi_1) = 1)$, por lo tanto si existe una valuación v tal que $v(\varphi_3) = 0$ se cumple que $v(\varphi_1) = 1$ y $v(\varphi_3) = 0$ por lo que $\varphi_1 \not\models \varphi_3$. Consideremos v_1 dada en la letra.

$$\begin{aligned}
 & v_1((\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow \psi) \\
 &= (\text{def. de valuación}) \\
 & \max\{1 - v_1(\varphi \rightarrow \psi), v_1(\psi)\} \\
 &= (\text{def. de } v_1) \\
 & \max\{1 - v_1(\varphi \rightarrow \psi), 0\} \\
 &= (\text{def. de valuación y aritmética}) \\
 & 1 - \max\{1 - v_1(\varphi), v_1(\psi)\} \\
 &= (\text{def. de } v_1) \\
 & 1 - \max\{1 - 0, 0\} \\
 &= (\text{aritmética}) \\
 & 0
 \end{aligned}$$



Como encontramos una valuación tal que $v_1(\varphi_1) = 1$ y $v_1(\varphi_3) = 0$ entonces $\varphi_1 \not\models \varphi_3$ y por lo tanto $(\exists \alpha \in \Gamma)(\alpha \not\models \varphi_3)$ y la afirmación es **verdadera**.

Ejercicio 3 (25 puntos)

Construya derivaciones que prueben los siguientes juicios:

- a. $\vdash (\alpha \vee \beta) \leftrightarrow (\neg\beta \rightarrow \alpha)$
 b. $(\forall x)(P(x) \vee (\exists y)(Q(x, y) \wedge P(y))), \neg P(d), (\forall z)(Q(c, z) \rightarrow d = z) \vdash P(c)$

Nota: En ningún caso se aceptan justificaciones semánticas.

Propuesta de solución

a.

$$\begin{array}{c}
 \frac{\frac{\frac{[\alpha \vee \beta]^1 \quad [\alpha]^3}{\neg\beta \rightarrow \alpha} I \rightarrow (2) \quad \frac{\frac{[\neg\beta]^2 \quad [\beta]^3}{\perp} E \neg \quad \frac{\perp}{\alpha \vee \beta} E \vee (3)}{\perp} E \neg}{\frac{\perp}{\alpha \vee \beta} RAA(4)} I \leftrightarrow (1) \\
 \frac{\frac{[\neg(\alpha \vee \beta)]^4 \quad \frac{\frac{[\neg\beta \rightarrow \alpha]^1 \quad [\neg\beta]^5}{\alpha \vee \beta} IV}{\perp} E \neg}{\perp} RAA(5)}{\frac{\perp}{\alpha \vee \beta} IV} E \neg
 \end{array}$$

7/10

b.

$$\begin{array}{c}
\frac{(\forall z)(Q(c, z) \rightarrow d = z) \quad E\forall(*4) \quad \frac{Q(c, y) \rightarrow d = y}{d = y} \quad E\rightarrow \quad \frac{[Q(c, y) \wedge P(y)]^2}{Q(c, y)} E\wedge}{\frac{Q(c, y) \rightarrow d = y}{d = y} \quad E\rightarrow \quad \frac{\neg P(d)}{\neg P(y)} RI4(*3) \quad \frac{[Q(c, y) \wedge P(y)]^2}{P(y)} E\wedge}{\frac{\perp}{P(c)} E\perp \quad E\exists(*2)} \\
\frac{(\forall x)(P(x) \vee (\exists y)(Q(x, y) \wedge P(y))) \quad E\forall(*1) \quad \frac{[P(c)]^1}{P(c)} \quad \frac{[(\exists y)(Q(c, y) \wedge P(y))]^1}{P(c)} E\vee(1)}{P(c)}
\end{array}$$

- (*₁) c libre para x en $P(x) \vee (\exists y)(Q(x, y) \wedge P(y))$
 (*₂) $y \notin \text{FV}(\{P(c), (\forall z)(Q(c, z) \rightarrow d = z), \neg P(d)\})$
 (*₃) d y y están libres para z en $\neg P(z)$
 (*₄) y libre para z en $Q(c, z) \rightarrow d = z$



Ejercicio 4 (25 puntos)

Considere un lenguaje de primer orden de tipo $\langle -, -; 0 \rangle$ y el conjunto de estructuras de ese tipo de similitud, cuyos universos tienen a lo sumo dos elementos:

$$\mathcal{K} = \{\mathcal{M} : \#|\mathcal{M}| \leq 2\}$$

Determine si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas, justificando adecuadamente en cada caso:

- $\text{CONS}(\{(\forall x)(\forall y)(\forall z)(x = y \vee y = z \vee x = z)\}) = \text{Th}(\mathcal{K})$
- $(\exists x)(\exists y)\neg x = y \in \text{Th}(\mathcal{K})$
- $\text{Th}(\mathcal{K})$ es consistente maximal.

Propuesta de solución

a. **VERDADERO.**

Llamemos α a la fórmula $(\forall x)(\forall y)(\forall z)(x = y \vee y = z \vee x = z)$.

Sea $\mathcal{M}$ una estructura arbitraria del tipo dado.

$$\begin{aligned}
&\mathcal{M} \models \alpha \\
&\Leftrightarrow (\text{def. } \alpha) \\
&\mathcal{M} \models (\forall x)(\forall y)(\forall z)(x = y \vee y = z \vee x = z) \\
&\Leftrightarrow (2.4.5) \\
&(\bar{\forall} a \in |\mathcal{M}|)(\bar{\forall} b \in |\mathcal{M}|)(\bar{\forall} c \in |\mathcal{M}|)\mathcal{M} \models \bar{a} = \bar{b} \vee \bar{b} = \bar{c} \vee \bar{a} = \bar{c} \\
&\Leftrightarrow (2.4.5) \\
&(\bar{\forall} a \in |\mathcal{M}|)(\bar{\forall} b \in |\mathcal{M}|)(\bar{\forall} c \in |\mathcal{M}|)(\mathcal{M} \models \bar{a} = \bar{b} \text{ o } \mathcal{M} \models \bar{b} = \bar{c} \text{ o } \mathcal{M} \models \bar{a} = \bar{c}) \\
&\Leftrightarrow (\text{def. } \mathcal{M} \text{ e interp.}) \\
&(\bar{\forall} a \in |\mathcal{M}|)(\bar{\forall} b \in |\mathcal{M}|)(\bar{\forall} c \in |\mathcal{M}|)(a = b \text{ o } b = c \text{ o } a = c) \\
&\Leftrightarrow (\text{teoría de conjuntos}) \\
&\#|\mathcal{M}| \leq 2 \\
&\Leftrightarrow (\text{def. } \mathcal{K}) \\
&\mathcal{M} \in \mathcal{K}
\end{aligned}$$

8/10

Con esto probamos que cualquier estructura $\mathcal{M}$ cumple:

$$\mathcal{M} \models \alpha \Leftrightarrow \mathcal{M} \in \mathcal{K} \quad (\mathbf{A}).$$

Por otro lado, consideramos una sentencia φ arbitraria:

$$\begin{aligned} & \varphi \in \text{CONS}(\alpha) \\ & \Leftrightarrow (\text{def. Cons}) \\ & \alpha \vdash \varphi \\ & \Leftrightarrow (\text{corr. y compl.}) \\ & \alpha \models \varphi \\ & \Leftrightarrow (\text{def. } \models) \\ & (\forall \mathcal{M} \text{ eta})(\text{Si } \mathcal{M} \models \alpha, \text{ entonces } \mathcal{M} \models \varphi) \\ & \Leftrightarrow (\mathbf{A}) \\ & (\forall \mathcal{M} \text{ eta})(\text{Si } \mathcal{M} \in \mathcal{K}, \text{ entonces } \mathcal{M} \models \varphi) \\ & \Leftrightarrow (\text{teo. conjuntos}) \\ & (\forall \mathcal{M} \in \mathcal{K}) \mathcal{M} \models \varphi \\ & \Leftrightarrow (\text{def. Th}) \\ & \varphi \in \text{Th}(\mathcal{K}) \end{aligned}$$



Por lo tanto, $\text{CONS}(\alpha) = \text{Th}(\mathcal{K})$, que es lo que se quería probar.

b. **FALSO.**

Llamemos β a la fórmula $(\exists x)(\exists y)\neg x = y$.

Sea $\mathcal{M}_b = \langle \{o\} \rangle$.

Se cumple que $\mathcal{M}_b \in \mathcal{K}$, porque el universo de la estructura tiene sólo un elemento, que es menor que 2. Además, $\mathcal{M}_b$ no modela β . Si lo hiciera:

$$\begin{aligned} & \mathcal{M}_b \models \beta \\ & \Leftrightarrow (\text{def. } \beta) \\ & \mathcal{M}_b \models (\exists x)(\exists y)\neg x = y \\ & \Leftrightarrow (2.4.5) \\ & (\exists a \in |\mathcal{M}_b|)(\exists b \in |\mathcal{M}_b|)\mathcal{M}_b \models \neg a = b \\ & \Leftrightarrow (2.4.5) \\ & (\exists a \in |\mathcal{M}_b|)(\exists b \in |\mathcal{M}_b|)\mathcal{M}_b \not\models a = b \\ & \Leftrightarrow (\text{def. } \mathcal{M}_b \text{ e interp.}) \\ & (\exists a \in |\mathcal{M}_b|)(\exists b \in |\mathcal{M}_b|)a \neq b \\ & \Leftrightarrow (|\mathcal{M}_b| = \{o\}) \\ & o \neq o \\ & \text{y esto claramente no se cumple.} \end{aligned}$$

Como encontramos una estructura de $\mathcal{K}$ que no modela β , concluimos que $\beta \notin \text{Th}(\mathcal{K})$, como queríamos.

c. **FALSO.**

Consideremos la estructura $\mathcal{M}_c = \langle \{o, \bullet\} \rangle$.

Sabemos que $\mathcal{M}_c \in \mathcal{K}$, ya que $\#|\mathcal{M}_c| = 2$, que es menor o igual que 2. Por lo tanto, por definición de Th , podemos afirmar que:

$$\mathcal{M}_c \models \text{Th}(\mathcal{K})$$

9/10

Por otra parte, probaremos que $\mathcal{M}_c \models \beta$:

$$\begin{aligned}
 &\mathcal{M}_c \models \beta \\
 &\Leftrightarrow (\text{desarrollo de la parte b}) \\
 &(\exists a \in |\mathcal{M}_c|)(\exists b \in |\mathcal{M}_c|)a \neq b \\
 &\Leftarrow (\text{tomo } a = \circ \text{ y } b = \bullet) \\
 &\circ \neq \bullet \\
 &\text{lo que se cumple trivialmente.}
 \end{aligned}$$



Como $\mathcal{M}_c \models Th(\mathcal{K})$ y $\mathcal{M}_c \models \beta$, podemos afirmar que $Th(\mathcal{K}) \cup \{\beta\}$ es consistente.

Pero entonces $Th(\mathcal{K})$ no puede ser consistente maximal, porque encontramos una sentencia β tal que $\beta \notin Th(\mathcal{K})$ (por parte anterior), pero que $Th(\mathcal{K}) \cup \{\beta\}$ es consistente.