

Examen de Lógica

29 de julio de 2026

Ejercicio 1(25 puntos)

- Defina $PROP'$ el subconjunto de $PROP$ que solo tiene los conectivos $\{\rightarrow, \perp, \neg\}$.
- Defina una función $F : PROP' \rightarrow PROP'$ tal que dada una fórmula φ , $F(\varphi)$ resulta de:
 - eliminar todas las ocurrencias del conectivo $\neg$,
 - y sustituir todo átomo A en φ por $(A \rightarrow A)$.

Ejemplo: $F((\perp \rightarrow (\neg p_2))) = ((\perp \rightarrow \perp) \rightarrow (p_2 \rightarrow p_2))$

- Pruebe por inducción que para cualquier fórmula $\varphi \in PROP'$, $\models F(\varphi)$.

Propuesta de solución



- Definición de $PROP'$:
 - $\perp \in PROP'$
 - Si $p_i \in \mathcal{P}$ entonces $p_i \in PROP'$
 - Si $\alpha \in PROP'$ entonces $(\neg\alpha) \in PROP'$
 - Si $\alpha \in PROP'$ y $\beta \in PROP'$ entonces $(\alpha \rightarrow \beta) \in PROP'$
- $F : PROP' \rightarrow PROP'$
 - $F(\perp) = (\perp \rightarrow \perp)$
 - $F(p_i) = (p_i \rightarrow p_i)$
 - $F((\neg\alpha)) = F(\alpha)$
 - $F((\alpha \rightarrow \beta)) = (F(\alpha) \rightarrow F(\beta))$
- Queremos probar: $(\forall \varphi \in PROP')(\models F(\varphi))$

Se hará una prueba utilizando el PIP para $PROP'$, con la propiedad:

$$P(\varphi) := (\models F(\varphi))$$

Paso Base 1

$$T) P(\perp) : (\models F(\perp))$$

Demo.

Sea v una valuación arbitraria.

$$\begin{aligned} &v(F(\perp)) \\ &= (\text{def. } F) \\ &v((\perp \rightarrow \perp)) \\ &= (\text{def. valuación}) \\ &\max\{1 - v(\perp), v(\perp)\} \\ &= (v(\perp) = 0) \\ &1 \end{aligned}$$

Como cualquier valuación cumple $v(F(\perp)) = 1$, concluimos que $\models F(\perp)$.

1/10

Paso Base 2**T)** $P(p_i) : (\models F(p_i))$ **Demo.**Sea v una valuación arbitraria.

$$\begin{aligned}
 &v(F(p_i)) \\
 &= (\text{def. } F) \\
 &v((p_i \rightarrow p_i)) \\
 &= (\text{def. valuación}) \\
 &\text{máx}\{1 - v(p_i), v(p_i)\} \\
 &= (v(p_i) \in \{0, 1\}) \\
 &1
 \end{aligned}$$

Como cualquier valuación cumple $v(F(p_i)) = 1$, concluimos que $\models F(p_i)$.**Paso Inductivo 1****HI)** $P(\varphi) : (\models F(\varphi))$ **TI)** $P((\neg\varphi)) : (\models F(\neg\varphi))$ **Demo.**

$$\begin{aligned}
 &\models F(\neg\varphi) \\
 &\Leftrightarrow (\text{def. } F) \\
 &\models F(\varphi)
 \end{aligned}$$

Como se cumple $\models F(\varphi)$ por la HI, concluimos que $\models F(\neg\varphi)$.**Paso Inductivo 2****HI)** $P(\varphi) : (\models F(\varphi))$ $P(\psi) : (\models F(\psi))$ **TI)** $P((\varphi \rightarrow \psi)) : (\models F((\varphi \rightarrow \psi)))$ **Demo.**

$$\begin{aligned}
 &\models F((\varphi \rightarrow \psi)) \\
 &\Leftrightarrow (\text{def. } F) \\
 &\models (F(\varphi) \rightarrow F(\psi)) \\
 &\Leftrightarrow (\text{def. } \models) \\
 &(\bar{\forall} v : Val)(v(F(\varphi) \rightarrow F(\psi)) = 1) \\
 &\Leftrightarrow (\text{def. valuación}) \\
 &(\bar{\forall} v : Val)(\text{máx}\{1 - v(F(\varphi)), v(F(\psi))\} = 1) \\
 &\Leftarrow (\text{def. máx}) \\
 &(\bar{\forall} v : Val)(v(F(\psi)) = 1) \\
 &\Leftrightarrow (\text{def. } \models) \\
 &\models F(\psi)
 \end{aligned}$$

Como se cumple $\models F(\psi)$ por la HI, concluimos que $\models F((\varphi \rightarrow \psi))$.Aplicando el PIP para PROP' , se concluye que $(\bar{\forall} \varphi \in \text{PROP}')(\models F(\varphi))$.**Ejercicio 2 (25 puntos)**

Considere un lenguaje de primer orden con tipo de similaridad $\langle 1, 1; 1; 0 \rangle$, con símbolos de predicado P y Q , y símbolo de función f .

Sean:

- $\varphi := (\forall x) \neg (P(f(x)) \rightarrow (\forall z) P(z))$
- $\psi := (\forall x) P(f(x)) \wedge (\exists z) \neg P(z)$

a. Demuestre que φ es equivalente a ψ .

Sugerencia: Utilizar una cadena de equivalencias conocidas.

- b. Demuestre que $\{\psi, (\forall x)(\neg f(x) = 'x)\} \not\models \perp$.
- c. Demuestre que $\{\psi, (\forall x) \neg P(x)\} \models (\forall x) Q(x)$.

Propuesta de solución

a. Utilizamos una cadena de equivalencias conocidas:

$$\begin{aligned}
 \varphi &= (\forall x) \neg (P(f(x)) \rightarrow (\forall z) P(z)) \\
 &\text{eq (equivalencia } \rightarrow) \\
 &(\forall x) \neg (\neg P(f(x)) \vee (\forall z) P(z)) \\
 &\text{eq (De Morgan)} \\
 &(\forall x) (\neg \neg P(f(x)) \wedge \neg (\forall z) P(z)) \\
 &\text{eq (Doble negación)} \\
 &(\forall x) (P(f(x)) \wedge \neg (\forall z) P(z)) \\
 &\text{eq (De Morgan generalizada)} \\
 &(\forall x) (P(f(x)) \wedge (\exists z) \neg P(z)) \\
 &\text{eq (distributividad generalizada)} \\
 &(\forall x) P(f(x)) \wedge (\forall x) (\exists z) \neg P(z) \\
 &\text{eq (orden de los cuantificadores: } (\forall x)\alpha \text{ eq } \alpha \text{ si } x \notin FV(\alpha)) \\
 &(\forall x) P(f(x)) \wedge (\exists z) \neg P(z).
 \end{aligned}$$



b.

$$\begin{aligned}
 &\{\psi, (\forall x)(\neg f(x) = 'x)\} \not\models \perp \\
 &\Leftrightarrow (\text{def. de } \models) \\
 &(\exists \mathcal{M} : \text{e.t.a.}) (\mathcal{M} \models \{\psi, (\forall x)(\neg f(x) = 'x)\} \text{ y } \mathcal{M} \not\models \perp) \\
 &\Leftrightarrow (\text{def. de } \models) \\
 &(\exists \mathcal{M} : \text{e.t.a.}) (\mathcal{M} \models \{\psi, (\forall x)(\neg f(x) = 'x)\} \text{ y } v^{\mathcal{M}}(\perp) = 0) \\
 &\Leftrightarrow (\text{def. de } v^{\mathcal{M}}) \\
 &(\exists \mathcal{M} : \text{e.t.a.}) (\mathcal{M} \models \{\psi, (\forall x)(\neg f(x) = 'x)\})
 \end{aligned}$$

Sea $\mathcal{M}_1 = \langle \{\circ, \square, \triangle\}, \{\circ, \square\}, \emptyset, F \rangle$,

donde $F(\circ) = \square$, $F(\square) = \circ$, $F(\triangle) = \circ$.

Veamos que $\mathcal{M}_1 \models \psi$ y $\mathcal{M}_1 \models (\forall x)(\neg f(x) = 'x)$.

$$\begin{aligned}
 &\mathcal{M}_1 \models (\forall x) P(f(x)) \wedge (\exists z) \neg P(z) \\
 &\Leftrightarrow (2.4.5) \\
 &\mathcal{M}_1 \models (\forall x) P(f(x)) \text{ y } \mathcal{M}_1 \models (\exists z) \neg P(z) \\
 &\Leftrightarrow (2.4.5) \\
 &(\bar{\forall} a \in |\mathcal{M}_1|) \mathcal{M}_1 \models P(f(\bar{a})) \text{ y } (\bar{\exists} b \in |\mathcal{M}_1|) \mathcal{M}_1 \models \neg P(\bar{b}) \\
 &\Leftrightarrow (2.4.5) \\
 &(\bar{\forall} a \in |\mathcal{M}_1|) \mathcal{M}_1 \models P(f(\bar{a})) \text{ y } (\bar{\exists} b \in |\mathcal{M}_1|) \mathcal{M}_1 \not\models P(\bar{b}) \\
 &\Leftrightarrow (\text{def. } \mathcal{M}_1) \\
 &(\bar{\forall} a \in \{\circ, \square, \triangle\}) F(a) \in \{\circ, \square\} \text{ y } (\bar{\exists} b \in \{\circ, \square, \triangle\}) b \notin \{\circ, \square\}
 \end{aligned}$$

Verificamos que ambas condiciones se cumplen. Para la primera realizamos un análisis de casos:

- Si $a = \square \Rightarrow F(a) = \circ \Rightarrow F(a) \in \{\circ, \square\}$
- Si $a = \circ \Rightarrow F(a) = \square \Rightarrow F(a) \in \{\circ, \square\}$
- Si $a = \triangle \Rightarrow F(a) = \circ \Rightarrow F(a) \in \{\circ, \square\}$

Por lo tanto: $(\forall a \in \{\circ, \square, \triangle\}) F(a) \in \{\circ, \square\}$

Para la segunda condición, tomamos $b = \triangle$ como testigo. Se cumple que $b \notin \{\circ, \square\}$.

Luego, $\mathcal{M}_1 \models \psi$.

Falta demostrar que $\mathcal{M}_1 \models (\forall x)(\neg f(x) = x)$:



$$\begin{aligned}
 & \mathcal{M}_1 \models (\forall x)(\neg f(x) = x) \\
 & \Leftrightarrow (2.4.5) \\
 & (\forall a \in |\mathcal{M}_1|) \mathcal{M}_1 \models \neg f(\bar{a}) = \bar{a} \\
 & \Leftrightarrow (2.4.5) \\
 & (\forall a \in |\mathcal{M}_1|) \mathcal{M}_1 \models f(\bar{a}) \neq \bar{a} \\
 & \Leftrightarrow (\text{def. de } F \text{ y } v^{\mathcal{M}_1}) \\
 & (\forall a \in |\mathcal{M}_1|) F(a) \neq a
 \end{aligned}$$

Luego, $\mathcal{M}_1 \models (\forall x)(\neg f(x) = x)$ si y solo si
 $(\forall a \in \{\circ, \square, \triangle\}) F(a) \neq a$.

Verificamos que se cumple realizando un análisis de casos:

- Si $a = \circ \Rightarrow F(a) = \square \Rightarrow F(a) \neq a$
- Si $a = \square \Rightarrow F(a) = \circ \Rightarrow F(a) \neq a$
- Si $a = \triangle \Rightarrow F(a) = \circ \Rightarrow F(a) \neq a$.

Concluimos que $\mathcal{M}_1 \models (\forall x)(\neg f(x) = x)$.

Por lo cual podemos afirmar que $\mathcal{M}_1 \models \psi$ y $\mathcal{M}_1 \models (\forall x)(\neg f(x) = x)$.

Entonces, $((\exists \mathcal{M}) : \text{e.t.a.})(\mathcal{M} \models \{\psi, (\forall x)(\neg f(x) = x)\})$.

Por lo tanto, $\{\psi, (\forall x)(\neg f(x) = x)\} \not\models \perp$.

c.

$$\begin{aligned}
 & \{\psi, (\forall x)\neg P(x)\} \models (\forall x)Q(x) \\
 & \Leftrightarrow (\text{corrección y completitud}) \\
 & \{\psi, (\forall x)\neg P(x)\} \vdash (\forall x)Q(x)
 \end{aligned}$$

Sea $D \in \text{Der}$:

$$\frac{\frac{(\forall x)\neg P(x)}{\neg P(f(x))} E\forall(*1) \quad \frac{\frac{(\forall x)P(f(x)) \wedge (\exists z)\neg P(z)}{(\forall x)P(f(x))} E\wedge \quad \frac{(\exists z)\neg P(z)}{P(f(x))} E\exists(*2)}{\perp} E\neg}{(\forall x)Q(x)} E\perp$$

- (*1) $f(x)$ libre para x en $\neg P(x)$
- (*2) x libre para x en $P(f(x))$



Entonces,

$((\exists D) \in \text{DER})(H(D) \subseteq \{\psi, (\forall x)\neg P(x)\})$ y $C(D) = (\forall x)Q(x)$.

Por lo tanto,

$\{\psi, (\forall x)\neg P(x)\} \vdash (\forall x)Q(x)$.

b.

$$\begin{array}{c}
 \frac{(\forall x)(\forall y)(\forall z)(R(x, y) \wedge R(x, z) \rightarrow P(y, z))}{(\forall y)(\forall z)(R(x, y) \wedge R(x, z) \rightarrow P(y, z))} E\forall(*5) \\
 \frac{(\forall y)(\forall z)(R(x, y) \wedge R(x, z) \rightarrow P(y, z))}{(\forall z)(R(x, x) \wedge R(x, z) \rightarrow P(x, z))} E\forall(*4) \\
 \frac{(\forall z)(R(x, x) \wedge R(x, z) \rightarrow P(x, z))}{R(x, x) \wedge R(x, x) \rightarrow P(x, x)} E\forall(*3) \\
 \frac{R(x, x) \wedge R(x, x) \rightarrow P(x, x)}{R(x, x) \wedge R(x, x)} I\wedge \\
 \frac{R(x, x) \wedge R(x, x)}{R(x, x)} E\rightarrow \\
 \frac{R(x, x)}{(\exists x)R(x, x)} I\exists(*2) \\
 \frac{(\exists x)R(x, x)}{(\exists x)P(x, x)} E\exists^1(*1)
 \end{array}$$

(*1) $x \notin FV((\exists x)P(x, x), (\forall x)(\forall y)(\forall z)(R(x, y) \wedge R(x, z) \rightarrow P(y, z)))$ (*2) x libre para x en $P(x, x)$ (*3) x libre para z en $R(x, x) \wedge R(x, z) \rightarrow P(x, z)$ (*4) x libre para y en $(\forall z)(R(x, y) \wedge R(x, z) \rightarrow P(y, z))$ (*5) x libre para x en $(\forall y)(\forall z)(R(x, y) \wedge R(x, z) \rightarrow P(y, z))$ 

Ejercicio 4 (25 puntos)

Sea v_1 una valuación tal que $v_1(p_i) = 0$ para todo $i \in \mathbb{N}$.

Considere el conjunto Γ de todas las fórmulas de PROP que son verdaderas en esa valuación y Δ el conjunto de las fórmulas de Γ luego de sustituir toda ocurrencia de p_0 por $(p_1 \wedge p_2)$. Es decir:

$$\Gamma = \{\varphi \in \text{PROP} \mid v_1(\varphi) = 1\} \text{ y } \Delta = \{\varphi[(p_1 \wedge p_2)/p_0] \mid \varphi \in \Gamma\}$$

Se pide:

- Demuestre que Γ es consistente maximal.
- Demuestre que Δ es consistente.
- Demuestre que $\Delta \cup \{p_0\}$ es completo.
- Dé $\psi \in \text{PROP}$ tal que $\text{CONS}(\Delta \cup \{\psi\})$ sea consistente maximal. Justifique.



Observación 1: Puede utilizar el siguiente resultado del curso:

Lema: Sean una valuación v y dos fórmulas α_1 y α_2 tales que $v(\alpha_1) = v(\alpha_2)$. Entonces,

Para cualquier $\beta \in \text{PROP}$ y $p \in P$, se cumple $v(\beta[\alpha_1/p]) = v(\beta[\alpha_2/p])$

Observación 2: Se recuerda que un conjunto $\Delta \subseteq \text{PROP}$ es completo si y solo si: Δ es consistente y para todo $\varphi \in \text{PROP}$ se cumple: $\Delta \vdash \varphi$ o $\Delta \vdash \neg\varphi$.

Propuesta de solución

- En el Teórico *Corrección y Completitud de la Lógica Proposicional* se demuestra que si v es una valuación se cumple que el conjunto $\{\varphi \in \text{PROP} \mid v(\varphi) = 1\}$ es consistente maximal.

Entonces, $\Gamma = \{\varphi \in \text{PROP} \mid v_1(\varphi) = 1\}$ es consistente maximal.

- Vamos a ver que para cada $\varphi \in \Delta$, $v_1(\varphi) = 1$, con lo que, por Condición suficiente de consistencia (Lema 1.6.4), quedará demostrado que Δ es consistente.

Por definición de la valuación v_1 , tenemos $v_1(p_0) = 0$ y $v_1(p_1 \wedge p_2) = \min\{v_1(p_1), v_1(p_2)\} = \min\{0, 0\} = 0$, por lo tanto $v_1(p_0) = v_1(p_1 \wedge p_2)$.

$$\begin{aligned} &v_1(p_1 \wedge p_2) \\ &= (\text{definición de valuación}) \\ &\min\{v_1(p_1), v_1(p_2)\} \\ &= (\text{definición de } v) \\ &\min\{0, 0\} \\ &= (\text{aritmética}) \\ &0 \\ &= (\text{definición de } v) \\ &v_1(p_0) \end{aligned}$$

Entonces, por la Observación 1, para cualquier $\varphi \in \text{PROP}$, se cumple

$$v_1(\varphi[p_1 \wedge p_2/p_0]) = v_1(\varphi[p_0/p_0])). \quad (*)$$

Por lo tanto, si φ_Δ es una fórmula genérica de Δ , y φ_Γ es la fórmula de Γ de la cual φ_Δ se obtiene por sustitución, se cumple $v_1(\varphi_\Delta) = v_1(\varphi_\Gamma) = 1$.

$$\begin{aligned}
 & v_1(\varphi_\Delta) \\
 &= (\text{definición de } \Delta) \\
 & v_1(\varphi_\Gamma[p_1 \wedge p_2/p_0]) \\
 &= (*) \\
 & v_1(\varphi_\Gamma[p_0/p_0]) \\
 &= (\text{definición de sustitución}) \\
 & v_1(\varphi_\Gamma) \\
 &= (\text{definición de } \Gamma) \\
 & 1
 \end{aligned}$$



Por lo tanto, como para cada $\varphi \in \Delta$, $v_1(\varphi) = 1$, Δ es consistente.

- c. Por Caracterización semántica de completitud, Ejercicio 17 del práctico 5, $\Delta \cup \{p_0\}$ es completo si y solo si existe una **única** valuación v que cumple $v(\Delta \cup \{p_0\}) = 1$.

Sea una valuación v_2 tal que $v_2(p_0) = 1$ y para $i \geq 1$, $v_2(p_i) = 0$. Sea φ una fórmula genérica de Δ . Como, por construcción de Δ , en φ no hay ocurrencias de p_0 , la asignación de valor a las letras que sí ocurren en φ es la misma en la valuaciones v_1 y v_2 . Entonces, como el valor de verdad de una fórmula depende únicamente del valor de sus letras de proposición (Lema 1.2.3), y por parte b. sabemos que $v_1(\Delta) = 1$, llegamos a $v_2(\varphi) = 1$.

$$\begin{aligned}
 & \varphi \in \Delta \\
 & \Rightarrow (\text{construcción de } \Delta) \\
 & \text{Para cada } p_i \text{ que ocurre en } \varphi \text{ entonces } i \geq 1 \\
 & \Rightarrow (\text{definiciones de } v_1 \text{ y } v_2) \\
 & \text{Para cada } p_i \text{ que ocurre en } \varphi, v_1(p_i) = v_2(p_i) \\
 & \Rightarrow (\text{Lema 1.2.3}) \\
 & v_1(\varphi) = v_2(\varphi) \\
 & \Rightarrow (\text{parte b.}) \\
 & v_2(\varphi) = 1
 \end{aligned}$$

Como, además, $v_2(p_0) = 1$, se cumple $v_2(\Delta \cup \{p_0\}) = 1$.

Para ver que v_2 es la única valuación que lo cumple, sea v una valuación genérica que cumple $v(\Delta \cup \{p_0\}) = 1$. Como $p_0 \in \Delta \cup \{p_0\}$ se debe cumplir $v(p_0) = 1$. Por las definiciones de v_1 , Γ y Δ , las fórmulas $\{\neg p_i \mid i \geq 1\}$ pertenecen a $\Delta \cup \{p_0\}$, por lo que necesariamente se debe cumplir $v(p_i) = 0$.



$$i \geq 1$$

$\Rightarrow$ (definición de v_1)

$$v_1(p_i) = 0$$

$\Rightarrow$ (definición de valuación)

$$v_1(\neg p_i) = 1$$

$\Rightarrow$ (definición de Γ)

$$\neg p_i \in \Gamma$$

$\Rightarrow$ (definición de Δ)

$$\neg p_i[p_1 \wedge p_2/p_0] \in \Delta$$

$\Rightarrow$ (definición de sustitución, e $i \geq 1$)

$$\neg p_i \in \Delta$$

$\Rightarrow$ (teoría de conjuntos)

$$\neg p_i \in \Delta \cup \{p_0\}$$

$\Rightarrow$ ($v(\Delta \cup \{p_0\}) = 1$)

$$v(\neg p_i) = 1$$

$\Rightarrow$ (definición de valuación)

$$v(p_i) = 0$$

Entonces la asignación de valor de verdad a las letras proposicionales debe cumplir $v(p_0) = 1$ y, para $i \geq 1, v(p_i) = 0$. Esta asignación es la misma que la de v_2 , y, por Teorema 1.2.2, esta asignación determina la valuación.

Por lo tanto, v_2 es la única valuación que cumple $v_2(\Delta \cup \{p_0\}) = 1$, por lo que $\Delta \cup \{p_0\}$ es completo.

d. Elegimos p_0 como fórmula ψ .

Por Ejercicio 7 del Práctico 5 sabemos que $\text{CONS}(\Delta \cup \{\psi\})$ es consistente maximal si y solo si $\Delta \cup \{\psi\}$ es completo. Y por la parte c. sabemos que $\Delta \cup \{\psi\}$ es completo.

$$\psi = p_0$$

$\Rightarrow$ (parte c.)

$\Delta \cup \{\psi\}$ es completo

$\Leftrightarrow$ (Ejercicio 7 del Práctico 5)

$\text{CONS}(\Delta \cup \{\psi\})$ es consistente maximal.