

Examen de Lógica

9 de febrero de 2026



Indicaciones generales

- Apagar los celulares.
- La duración del examen es de **tres (3)** horas.
- En esta prueba **no** se permite consultar material alguno.
- **Toda respuesta debe estar fundamentada.** Pueden usarse los resultados que aparecen en el texto del curso, en esos casos debe describirse con precisión el enunciado que se utiliza.
- Numerar todas las hojas e incluir en cada una su nombre y cédula de identidad, utilizar las hojas de un solo lado, escribir con lápiz, iniciar cada ejercicio en hoja nueva y poner en la primera hoja la cantidad de hojas entregadas.

Ejercicio 1(25 puntos)

- a. Definir el conjunto inductivo $\mathcal{L}$ de listas de números naturales con “|” como separador y “|” como la lista vacía. Por ejemplo: $1|23|4| \in \mathcal{L}$.
- b. Definir la función:

$$suma : \mathcal{L} \rightarrow \mathbb{N}$$

que dada una lista de naturales devuelve la suma de ellos.

Por ejemplo: $suma(1|23|4|) = 28$.

- c. Definir la función

$$insOrd : \mathbb{N} \times \mathcal{L} \rightarrow \mathcal{L}$$

que inserta ordenadamente un nuevo natural en una lista ya ordenada de forma creciente.

Por ejemplo: $insOrd(23, 1|4|) = 1|4|23|$

- d. Dada la función

$$\begin{aligned} merge : \mathcal{L} \times \mathcal{L} &\rightarrow \mathcal{L} \\ merge(|, l_2) &= l_2 \\ merge(n|l_1, l_2) &= insOrd(n, merge(l_1, l_2)) \end{aligned}$$

Dado $l_2 \in \mathcal{L}$, probar la siguiente propiedad:

$$(\forall l_1 \in \mathcal{L}) (suma(merge(l_1, l_2)) = suma(l_1) + suma(l_2))$$

Puede asumir sin demostrar la siguiente propiedad:

$$(\forall n \in \mathbb{N})(\forall l \in \mathcal{L})(suma(insOrd(n, l)) = n + suma(l))$$

Propuesta de solución

- a. Definimos el conjunto inductivo $\mathcal{L}$ como:

(i) $| \in \mathcal{L}$

(ii) Si $n \in \mathbb{N}$ y $w \in \mathcal{L}$ entonces $n|w \in \mathcal{L}$

b. Definimos la función **suma** como:

$$\begin{aligned} \text{suma} : \mathcal{L} &\rightarrow \mathbb{N} \\ \text{suma}(\[]) &= 0 \\ \text{suma}(n|w) &= n + \text{suma}(w) \end{aligned}$$

c. Definimos la función **insertOrd**:

$$\begin{aligned} \text{insertOrd} : \mathbb{N} \times \mathcal{L} &\rightarrow \mathcal{L} \\ \text{insertOrd}(n, \[]) &= n|[] \\ \text{insertOrd}(n, m|w) &= \begin{cases} n|m|w & \text{si } n \leq m \\ m|\text{insertOrd}(n, w) & \text{si } n > m \end{cases} \end{aligned}$$

d. Probaremos la afirmación usando el PIP sobre $\mathcal{L}$, con la propiedad:

$$P(l_1) := \text{suma}(\text{mergeOrd}(l_1, l_2)) = \text{suma}(l_1) + \text{suma}(l_2)$$

Paso Base

T)

$$P(\[]) : \text{suma}(\text{mergeOrd}(\[], l_2)) = \text{suma}(\[]) + \text{suma}(l_2)$$

Demo.

$$\begin{aligned} &\text{suma}(\text{mergeOrd}(\[], l_2)) \\ &= (\text{Def. mergeOrd}) \\ &\text{suma}(l_2) \\ &= (\text{Aritmetica}) \\ &0 + \text{suma}(l_2) \\ &= (\text{Def. suma}) \\ &\text{suma}(\[]) + \text{suma}(l_2) \end{aligned}$$

Paso Inductivo

HI)

$$P(l_1) := \text{suma}(\text{mergeOrd}(l_1, l_2)) = \text{suma}(l_1) + \text{suma}(l_2)$$

TI)

$$P(n|l_1) := \text{suma}(\text{mergeOrd}(n|l_1, l_2)) = \text{suma}(n|l_1) + \text{suma}(l_2)$$

Demo.

$$\begin{aligned} &\text{suma}(\text{mergeOrd}(n|l_1, l_2)) \\ &= (\text{Def. mergeOrd}) \\ &\text{suma}(\text{insertOrd}(n, \text{mergeOrd}(l_1, l_2))) \\ &= (\text{Propiedad}) \\ &n + \text{suma}(\text{mergeOrd}(l_1, l_2)) \\ &= (\text{HI}) \\ &n + \text{suma}(l_1) + \text{suma}(l_2) \\ &= (\text{Def. suma}) \\ &\text{suma}(n|l_1) + \text{suma}(l_2) \end{aligned}$$

Como nos encontramos bajo las hipotesis del PIP para $\mathcal{L}$, y lo demostrado en el PB y PI podemos afirmar que: $(\forall l_1) \text{ suma}(\text{mergeOrd}(l_1, l_2)) = \text{suma}(l_1) + \text{suma}(l_2)$





Ejercicio 2 (25 puntos)

Se define la relación $\#$ entre las fórmulas de PROP:

$$\varphi \# \psi \Leftrightarrow (\forall v : \text{valuacion})(v(\varphi) \leq v(\psi))$$

Para las siguientes afirmaciones indicar si son verdaderas o falsas. Justifique su respuesta.

- $(\forall \varphi \in \text{PROP})(\varphi \# \varphi)$
- $(\forall \varphi \in \text{PROP})(\forall \psi \in \text{PROP})$ (Si $\varphi \# \psi$ y φ es una tautología entonces ψ es una contingencia)
- $(\exists \psi \in \text{PROP})((\forall \varphi \in \text{PROP})(\varphi \# \psi))$
- $(\exists \varphi \in \text{PROP})(\varphi \# \neg \varphi)$

Propuesta de solución

$$\varphi \# \psi \Leftrightarrow (\forall v : \text{valuacion})(v(\varphi) \leq v(\psi))$$

- $(\forall \varphi \in \text{PROP})(\varphi \# \varphi)$ - **VERDADERA**

Sea $\varphi \in \text{PROP}$

$$\begin{aligned} &\varphi \# \varphi \\ &\Leftrightarrow (\text{def. de } \#) \\ &(\forall v : \text{valuacion})(v(\varphi) \leq v(\varphi)) \end{aligned}$$

Esta afirmación es verdadera por la definición de valuación.

- $(\forall \varphi \in \text{PROP})(\forall \psi \in \text{PROP})$ (Si $\varphi \# \psi$ y φ es una tautología entonces ψ es una contingencia) - **FALSA**

Para mostrar que la afirmación es falsa alcanza con encontrar una tautología φ que se relacione con una fórmula de PROP que no sea una contingencia.

Sea $\varphi := \neg \perp$.

Por definición de valuación se cumple que $(\forall v : \text{valuacion})(v(\varphi) = 1)$ por lo tanto φ es una tautología.

Sea $\psi := \neg \perp$.

Por la parte anterior se sabe que $\neg \perp \# \neg \perp$ y $\neg \perp$ no es una contingencia.

- $(\exists \psi \in \text{PROP})((\forall \varphi \in \text{PROP})(\varphi \# \psi))$ - **VERDADERA**

Sea $\psi := \neg \perp \Rightarrow (\forall v : \text{valuacion})(v(\psi) = 1)$

Sea $\varphi \in \text{PROP}$

$$\begin{aligned} &\varphi \in \text{PROP} \\ &\Leftrightarrow (\text{def. de valuación}) \\ &(\forall v : \text{valuacion})(v(\varphi) \leq 1) \\ &\Leftrightarrow (\text{def. de } \psi) \\ &(\forall v : \text{valuacion})(v(\varphi) \leq v(\psi)) \\ &\Leftrightarrow (\text{def. de } \#) \\ &\varphi \# \psi \end{aligned}$$

d. $(\exists \varphi \in \text{PROP})(\varphi \# \neg \varphi)$ - **VERDADERA**

Tomamos $\varphi := \perp$. Probaremos que $\varphi \# \neg \varphi$ mostrando que:

$$(\forall v : \text{valuacion})(v(\perp) \leq v(\neg \perp))$$

Sea v una valuación arbitraria. Entonces:

$$\begin{aligned} v(\perp) &\leq v(\neg \perp) \\ \Leftrightarrow (\text{def. valuación}) \\ v(\perp) &\leq 1 - v(\perp) \\ \Leftrightarrow (\text{def. valuación}) \\ 0 &\leq 1 - 0 \end{aligned}$$

Lo que se cumple trivialmente por aritmética. Por lo tanto, se cumple que $\perp \# \neg \perp$.



Ejercicio 3 (25 puntos)

Construya derivaciones que prueben los siguientes juicios:

a. $\vdash ((p \rightarrow q) \wedge (\neg r \rightarrow p)) \rightarrow (\neg q \rightarrow r)$

b. $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3 \vdash (\exists w)f(h(w)) = g(f(w))$

siendo:

$$\begin{aligned} \varphi_1 &:= (\forall x)f(g(x)) = g(f(x)) \\ \varphi_2 &:= (\forall y)(P(y) \rightarrow h(y) = g(y)) \\ \varphi_3 &:= (\exists z)P(z) \end{aligned}$$

Nota: En ningún caso se aceptan justificaciones semánticas.

Propuesta de solución

a.

$$\frac{\frac{[(p \rightarrow q) \wedge (\neg r \rightarrow p)]^1}{p \rightarrow q} E\wedge \quad \frac{\frac{[(p \rightarrow q) \wedge (\neg r \rightarrow p)]^1}{\neg r \rightarrow p} E\wedge \quad \frac{[\neg r]^3}{p} E\rightarrow}{q} E\rightarrow \quad \frac{[\neg q]^2}{\neg q \rightarrow r} E\rightarrow}{((p \rightarrow q) \wedge (\neg r \rightarrow p)) \rightarrow (\neg q \rightarrow r)} E\rightarrow$$

b.

$$\frac{\frac{\frac{(\forall y)(P(y) \rightarrow h(y) = g(y))}{P(z) \rightarrow h(z) = g(z)} E\forall * 1 \quad \frac{[P(z)]^1}{h(z) = g(z)} E\rightarrow \quad \frac{h(z) = g(z)}{g(z) = h(z)} RI2}{f(h(z)) = g(f(z))} E\rightarrow * 3 \quad \frac{(\forall x)f(g(x)) = g(f(x))}{f(g(z)) = g(f(z))} E\forall * 2}{f(h(z)) = g(f(z))} RI4 * * 3 \quad \frac{(\exists z)P(z)}{(\exists w)f(h(w)) = g(f(w))} I\exists * 4 \quad \frac{f(h(z)) = g(f(z))}{(\exists w)f(h(w)) = g(f(w))} E\exists(1) * 5$$

- (*1) z libre para y en $P(y) \rightarrow h(y) = ' g(y)$
- (*2) z libre para x en $f(g(x)) = ' g(f(x))$
- (*3) $g(z)$ y $h(z)$ libres para u en $f(u) = ' g(f(z))$
- (*4) z libre para w en $f(h(w)) = ' g(f(w))$
- (*5) $z \notin \text{FV}((\exists w)f(h(w)) = ' g(f(w)))$
 $z \notin \text{FV}((\forall x)(P(x) \rightarrow h(x) = ' g(x)))$
 $z \notin \text{FV}((\forall x)f(g(x)) = ' g(f(x)))$

Ejercicio 4 (25 puntos)

Sea el lenguaje de primer orden con tipo de similaridad $\langle 1; 1; 1 \rangle$, con símbolo de predicado P , símbolo de función f y de constante c . Considere las siguientes fórmulas:

$$\begin{aligned}\alpha &:= (\forall x)P(f(x)) \\ \beta &:= P(c)\end{aligned}$$

Determine si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas, justificando en cada caso:

- a. $\beta \in \text{Th}(\text{Mod}(\alpha))$
- b. Existe una estructura M_b tal que $M_b \in \text{Mod}(\alpha) \cap \text{Mod}(\beta)$.
- c. $\text{CONS}(\alpha)$ es consistente maximal.

Propuesta de solución

- a. La afirmación es **FALSA**. Sea

$$M_a = \langle \{\circ, \bullet\}, \{\circ\}, F_\circ, \bullet \rangle$$

donde $F_\circ(x) = \circ$, para todo $x \in \{\circ, \bullet\}$.

Podemos probar que $M_a \models \alpha$:

$$\begin{aligned}M_a &\models \alpha \\ \Leftrightarrow (\text{Def. } \alpha) \\ M_a &\models (\forall x)P(f(x)) \\ \Leftrightarrow (2.4.5) \\ (\forall a \in \{\circ, \bullet\})M_a &\models P(f(\bar{a})) \\ \Leftrightarrow (\text{Def. } \models) \\ (\forall a \in \{\circ, \bullet\})f(\bar{a})^{M_a} &\in \{\circ\} \\ \Leftrightarrow (\text{Interpretación de términos en } M_a) \\ (\forall a \in \{\circ, \bullet\})F_\circ(\bar{a}^{M_a}) &\in \{\circ\} \\ \Leftrightarrow (\text{Interpretación de términos en } M_a) \\ (\forall a \in \{\circ, \bullet\})F_\circ(a) &\in \{\circ\} \\ \Leftrightarrow (\text{Def. } F_\circ) \\ (\forall a \in \{\circ, \bullet\})\circ &\in \{\circ\} \\ (\text{lo que se cumple trivialmente})\end{aligned}$$



Por otra parte, probamos que $M_a \not\models \beta$:

$$M_a \not\models \beta$$

$$\Leftrightarrow (\text{Def. } \beta)$$

$$M_a \not\models P(c)$$

$$\Leftrightarrow (\text{Def. } \models)$$

$$c^{M_a} \notin \{o\}$$

$$\Leftrightarrow (\text{Interpretación de términos en } M_a)$$

$$\bullet \notin \{o\}$$

(lo que se cumple trivialmente)

Entonces, encontramos M_a que modela α , pero no β . Por lo tanto:

$$(\exists M_a \text{ eta})(M_a \models \alpha \text{ y } M_a \not\models \beta)$$

$$\Rightarrow (\text{Def. } \models)$$

$$\alpha \not\models \beta$$

$$\Rightarrow (\text{Contrarrecíproco de corrección})$$

$$\alpha \not\models \beta$$

$$\Rightarrow (\text{Def. CONS})$$

$$\beta \notin \text{CONS}(\alpha)$$

$$\Rightarrow (Th(Mod(\Gamma)) = \text{CONS}(\Gamma))$$

$$\beta \notin Th(Mod(\alpha))$$

b. La afirmación es **VERDADERA**. Tomamos

$$M_b = \langle \{o, \bullet\}, \{o\}, F_o, o \rangle$$

Podemos probar que $M_b \models \alpha$:

$$M_b \models \alpha$$

$$\Leftrightarrow (\text{Def. } \alpha)$$

$$M_b \models (\forall x)P(f(x))$$

$$\Leftrightarrow (2.4.5)$$

$$(\forall a \in \{o, \bullet\})M_b \models P(f(\bar{a}))$$

$$\Leftrightarrow (\text{Def. } \models \text{ e interpretación})$$

$$(\forall a \in \{o, \bullet\})F_o(a) \in \{o\}$$

$$\Leftrightarrow (\text{Def. } F_o)$$

$$(\forall a \in \{o, \bullet\})o \in \{o\}$$

(lo que se cumple trivialmente)

Por otra parte, probamos que $M_b \models \beta$:

$$M_b \models \beta$$

$$\Leftrightarrow (\text{Def. } \beta)$$

$$M_b \models P(c)$$

$$\Leftrightarrow (\text{Def. } \models \text{ e interpretación})$$

$$o \in \{o\}$$

(lo que se cumple trivialmente)

Como $M_b \in Mod(\alpha)$ y $M_b \in Mod(\beta)$, M_b también pertenece a la intersección:

$$M_b \in Mod(\alpha) \cap Mod(\beta)$$

y por lo tanto, la afirmación es verdadera.

c. La afirmación es **FALSA**.

Por la parte a sabemos que $\beta \notin \text{CONS}(\alpha)$.



Pero por la parte b, sabemos que $\text{CONS}(\alpha) \cup \{\beta\}$ es consistente, ya que M_b modela tanto a α (y a sus consecuencias) como a β .

Pero entonces, por definición $\text{CONS}(\alpha)$ no puede ser consistente maximal, ya que encontramos una fórmula que no estaba en el conjunto, pero que al agregarla sigue siendo consistente.

