Semántica de la lógica proposicional

Introducción

Hemos visto la forma de construir frases en $PROP$, que por ahora carecen de significado. Necesitamos ahora una forma de asignar significado a las proposiciones, y lo haremos asignando a cada proposición un valor de verdad que podrá ser:

- $0 \quad = Falso$
- $1 \quad = Verdadero$

Para asignar un valor de verdad a cada proposición, asignaremos un valor de verdad a las fórmulas atómicas y luego recursivamente calcularemos el valor de las proposiciones más complejas a partir de ecuaciones recursivas que den significado a los conectivos.

Para las fórmulas atómicas valdrá lo siguiente:

- $\perp$ es $Falso$
- Las variables proposicionales $(p_0, p_1, p_2, ...)$ pueden tomar cualquier valor de verdad

En un contexto dado, las proposiciones simples serán verdaderas o falsas, por ejemplo *"4 es par"*. Como veremos más adelante, el hecho de no conocer el valor de verdad de las variables proposicionales no será un impedimento para lograr resultados.

Valuaciones

Diremos que una función $v : PROP \to \{0,1\}$ es una valuación si satisface:

- $v(\perp) = 0$
- $v((\alpha \wedge \beta)) = \min\{v(\alpha), v(\beta)\}$
- $v((\alpha \vee \beta)) = \max\{v(\alpha), v(\beta)\}$
- $v((\alpha \to \beta)) = \max\{1 - v(\alpha), v(\beta)\}$
- $v((\alpha \leftrightarrow \beta)) = 1$ si y sólo si $v(\alpha) = v(\beta)$
- $v((\neg\alpha)) = 1 - v(\alpha)$

El valor de verdad de los átomos determina el valor de verdad de una fórmula compleja. Se puede demostrar que dada una valuación $w : P \to \{0,1\}$, existe una única valuación $v : PROP \to \{0,1\}$ tal que $v(p_i) = w(p_i)$ para todo $p_i \in P$.

Tautología y consecuencia lógica

Diremos que $\alpha \in PROP$ es una <u>tautología</u> si y sólo si para cualquier valuación v se cumple que $v(\alpha) = 1$.

Dados $\Gamma \subseteq PROP$ y $\alpha \in PROP$, diremos que α es <u>consecuencia lógica</u> de Γ si y sólo si, se cumple que, si para todo $\gamma \in \Gamma$, $v(\gamma) = 1$, entonces $v(\alpha) = 1$.

Como notación, utilizaremos el símbolo $\models$

$\Gamma \models \alpha$ se lee como "α es consecuencia lógica de Γ" (note que Γ es un conjunto de proposiciones lógicas)

$\models \alpha$ significará $\varnothing \models \alpha$, y en este caso α es una tautología

Ejemplos

- $\alpha, \beta \models \alpha \wedge \beta$

  Demostración: Sea v una valuación, si $v(\alpha) = 1, v(\beta) = 1$ tenemos que $v(\alpha \wedge \beta) = \min\{1,1\} = 1$

- $\alpha \models \alpha \vee \beta$

  Demostración: Sea v una valuación, si $v(\alpha) = 1$ tenemos que $v(\alpha \vee \beta) = \max\{1, v(\beta)\} = 1$

- $\models \alpha \vee \neg\alpha$

  Demostración: Sea v una valuación $v(\alpha \vee \neg\alpha) = \max\{v(\alpha), v(\neg\alpha)\}$
  $= \max\{v(\alpha), 1 - v(\alpha)\} = 1$

Equivalencia

Diremos que dos proposiciones son equivalentes, y notaremos $\alpha\ eq\ \beta$ cuando $\models (\alpha \leftrightarrow \beta)$

Nota: Observar que eq es una relación de equivalencia en $PROP \times PROP$.

La equivalencia es muy útil en el proceso de razonamiento, ya que permite realizar sustituciones sin que cambie el valor de verdad de las proposiciones:

Si $\alpha\ eq\ \beta$, entonces $\varphi[\alpha / p_i]\ eq\ \varphi[\beta / p_i]$

Algunas tautologías interesantes se expresan en forma de leyes algebraicas:

Asociatividad de $\wedge$ y $\vee$ $\begin{cases} \models (\alpha \wedge \beta) \wedge \delta \leftrightarrow \alpha \wedge (\beta \wedge \delta) \\ \models (\alpha \vee \beta) \vee \delta \leftrightarrow \alpha \vee (\beta \vee \delta) \end{cases}$

Conmutatividad de $\wedge$ y $\vee$ $\begin{cases} \models (\alpha \wedge \beta) \leftrightarrow (\beta \wedge \alpha) \\ \models (\alpha \vee \beta) \leftrightarrow (\beta \vee \alpha) \end{cases}$

Distributividad de $\wedge$ y $\vee$ $\begin{cases} \models (\alpha \wedge \beta) \vee \delta \leftrightarrow (\alpha \vee \delta) \wedge (\beta \vee \delta) \\ \models (\alpha \vee \beta) \wedge \delta \leftrightarrow (\alpha \wedge \delta) \vee (\beta \wedge \delta) \end{cases}$

Leyes de De Morgan $\begin{cases} \models \neg(\alpha \wedge \beta) \leftrightarrow (\neg\alpha \vee \neg\beta) \\ \models \neg(\alpha \vee \beta) \leftrightarrow (\neg\alpha \wedge \neg\beta) \end{cases}$

Idempotencia de $\wedge$ y $\vee$ $\begin{cases} \models (\alpha \wedge \alpha) \leftrightarrow \alpha \\ \models (\alpha \vee \alpha) \leftrightarrow \alpha \end{cases}$

Doble negación $\models \neg\neg\alpha \leftrightarrow \alpha$