MATEMÁTICA DISCRETA Y LOGICA I

TEMAS A TRATAR

- Teoría de conjuntos y relaciones.
- Inducción, recursión, relaciones de recurrencia y sus aplicaciones en programación.
- Álgebra booleana y su aplicación en la construcción de circuitos digitales.
- Lógica proposicional y su aplicación en lenguajes de programación.
- Lógica de predicados.

INTRODUCCIÓN A LA TEORÍA CONJUNTOS

Un **conjunto** es una colección bien definida de objetos.

Estos objetos se llaman **elementos** y se dice que **pertenecen** al conjunto. Bien definido significa que para cualquier elemento que consideremos, podemos determinar si está o no en el conjunto observado.

Podemos definir un conjunto por **extensión** (explicitando todos sus elementos) o por **comprensión** (nombrando propiedades que cumplan todos sus elementos, tomados a partir de otro conjunto conocido).

INTRODUCCIÓN A LA TEORÍA CONJUNTOS

- **Nota**: es imposible definir por extensión un conjunto infinito.

$A = \{0,1,2,3,4,5,6\}$ $A = \{x : N \mid x < 7\}$

Conjunto definido por extensión Conjunto definido por comprensión

Cuando definimos un conjunto por comprensión, como en el ejemplo A = {x : N | x < 7}, debe especificarse el conjunto de dónde se seleccionarán los elementos que satisfacen la propiedad, en este caso N. De forma genérica, decimos que este conjunto es el **universo**, y en general se denota como **U** .

INTRODUCCIÓN A LA TEORÍA CONJUNTOS

- **Notación**: Usaremos letras mayúsculas para representar conjuntos y minúsculas para representar elementos. Para un conjunto A, escribiremos:

  $x \in A$ si x es un elemento de A,

  $x \notin A$ si x no es un elemento de A.

- **Igualdad** C = D si se verifica $(\forall e : e \in C \leftrightarrow e \in \mathrm{D})$

- **Inclusión** $C \subseteq$ D si se verifica $(\forall e : e \in C \rightarrow e \in D)$

- **Teorema**: $C = D \leftrightarrow \ C \subseteq D \ \wedge \ D \subseteq C$

INTRODUCCIÓN A LA TEORÍA CONJUNTOS

Aspectos importantes a tener en cuenta en la construcción de la teoría de conjuntos:

- No puede suceder que $e \in C$ y $e \notin C$
- No permitiremos que nuestros conjuntos tengan elementos repetidos, estas colecciones se denominan multiconjuntos.
- El orden de los elementos no será relevante, las colecciones donde el orden de los elementos es relevante se denominan listas.

INTRODUCCIÓN A LA TEORÍA CONJUNTOS

Definiciones.

- **Conjunto vacío**: es el único conjunto que no contiene elementos. Se denota como $\emptyset$ o { }.
- **Subconjunto:** C es un subconjunto de D cuando cada elemento de C es un elemento de D, y lo notamos: $C \subseteq D$ si $(\forall e: e \in C \rightarrow e \in \mathrm{D})$
- **Subconjunto propio:** C es un subconjunto propio de D cuando cada elemento de C es un elemento de D, y existe un elemento en D que no es elemento de C, lo que notamos:

$$C \subset \mathrm{D} \text{ si } (\forall e : e \in C \rightarrow e \in D) \wedge (\exists x : x \in D \wedge x \notin C)$$

INTRODUCCIÓN A LA TEORÍA CONJUNTOS

- **Cardinal**

Para cualquier conjunto finito A, $|A|$ denota el número de sus elementos, y se conoce como el cardinal, o tamaño, de A.

- **Conjunto potencia**

El conjunto potencia de un conjunto A, que se denota $P(A)$, es el conjunto de todos los subconjuntos de A, es decir: $P(A) = \{S \mid S \subseteq A\}$

Si consideramos, por ejemplo, el conjunto $A = \{1,2,3\}$, tendríamos que el conjunto potencia de A:

$$P(A) = \{\{\ \},\{1\},\{2\},\{3\},\{1,2\},\{1,3\},\{2,3\},\{1,2,3\}\}$$

$$Si\ |A| = n\ ,\quad \text{se tiene que}\quad |P(A)| = 2^n$$

INTRODUCCIÓN A LA TEORÍA CONJUNTOS

Operaciones de conjuntos:

- **Unión** $A \cup B = \{x \mid x \in A \vee x \in B\}$
- **Intersección** $A \cap B = \{x \mid x \in A \wedge x \in B\}$
- **Diferencia** $A - B = \{x \mid x \in A \vee x \notin B\}$
- **Diferencia simétrica** $A \oplus B = (A - B) \cup (B - A)$
- **Complemento** A'= U − A

<u>Observaciones</u>:

- Se utilizan, en algunas bibliografías, otros símbolos, por ejemplo:

  $\oplus = \Delta$ y $A' = \bar{A}$.

- Diremos que dos conjuntos son <u>**disjuntos**</u> si su intersección es vacía.

INTRODUCCIÓN A LA TEORÍA CONJUNTOS

- **Producto cartesiano** $A \times B = \{(a,b) \mid a \in A \wedge b \in B\}$

Diremos que los elementos de $A \times B$ son pares ordenados, y dados dos elementos de $A \times B$, (a,b) y (c,d) diremos que

$$(a,b) = (c,d) \leftrightarrow a = c \wedge b = d$$

- **Ejercicios**

Considere los conjuntos $A = \{0,1\}$ y $B = \{x, y, z\}$, determine $A \times B$ y $B \times A$, notando que el producto cartesiano no es conmutativo.

RELACIONES

Una **relación binaria** de A en B es cualquier subconjunto de $A \times B$.

Se dice que <u>una relación de A en A es una relación binaria en A</u>.

<u>Ejemplo</u>, sea $B = \{0,1\}$, $B \times B = \{(0,0), (0,1), (1,0), (1,1)\}$. El siguiente conjunto sería entonces una relación binaria en B : $M = \{(0,0), (1,0), (1,1)\}$.

Podríamos darle algo de semántica a esta relación, notando que cada par ordenado de la misma cumple la condición de tener la primer componente mayor o igual a la segunda, y podríamos llamar a la relación *"Mayor o igual que"*.

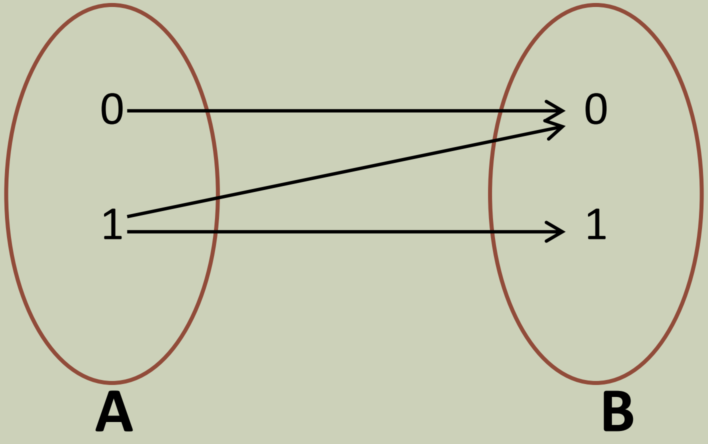
RELACIONES

Dada una relación R llamamos:

- **Dominio** de la relación, $D(R)$, al conjunto de elementos del primer conjunto, que tiene todas las primeras componentes de los pares ordenados de la relación.
- **Imagen** de la relación, $I(R)$, al conjunto de elementos del segundo conjunto, que son segunda componente de algún par de la relación.
- **Relación inversa** de la relación, R^{-1}, al conjunto de pares ordenados (y, x) tales que (x, y) están en la relación R.

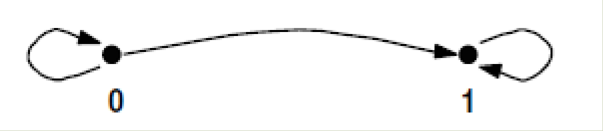
RELACIONES - REPRESENTACIÓN

Existen muchas formas de representar una relación, una de ellas es a partir de los diagramas de Venn de los conjuntos involucrados, donde se agrega una línea entre cada par de elementos que pertenecen a la relación.



RELACIONES - REPRESENTACIÓN

Si la relación es binaria en un conjunto, se puede simplificar el diagrama anterior, representando los elementos del conjunto una sola vez, y dibujando aristas entre cada par de elementos de la relación. A esta representación se la llama **dígrafo** (o grafo dirigido) de la relación.



Formalmente, un dígrafo *G* sobre un conjunto *V* está formado por los elementos de *V* , llamados vértices o nodos de *G* , y un subconjunto *E* de *V* ×*V* , conocido como las aristas (dirigidas) o arcos de *G* . Note que es posible que existan aristas de un vértice hacia sí mismo, este tipo de aristas se denominan lazos o bucles.

RELACIONES - REPRESENTACIÓN

Otra forma de representar relaciones es a través de una matriz de ceros y unos.

Consideremos los conjuntos $A = \{a,b,c\}$, y $B = \{1,2,3\}$, y definamos la relación R , relación binaria de A en B como

$$R = \{(a,1), (a,2), (b,2), (b,3), (c,1), (c,3)\}.$$

Si conservamos fijo el orden de los elementos de los conjuntos, podríamos tener una matriz de A filas y B columnas, donde para cada elemento (i, j) de la matriz (con $i \in A$, $j \in B$) se tiene:

- 0, si (i, j) no pertenece a la relación
- 1, si (i, j) pertenece a la relación

$$\mathcal{M}(\mathcal{R}) = \begin{array}{c} \\ (a) \\ (b) \\ (c) \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} (1) & (2) & (3) \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

RELACIONES - PROPIEDADES

A continuación daremos algunas definiciones importantes sobre propiedades de las relaciones binarias. Siendo R una relación binaria en A , diremos que:

- R es **reflexiva** sii $\forall x \in A, (x, x) \in R$
- R es **simétrica** sii $\forall (x, y) \in R, (y, x) \in R$
- R es **antisimétrica** sii $\forall x, y \in A, (x, y) \in R \wedge (y, x) \in R \rightarrow x = y$
- R es **transitiva** sii $\forall (x, y), (y, z) \in R, (x, z) \in R$

RELACIÓN DE EQUIVALENCIA

Cuando una relación es reflexiva, simétrica y transitiva decimos que es una **relación de equivalencia**.

- Las relaciones de equivalencia, generan una partición especial del conjunto sobre el que se define la relación binaria. A cada conjunto de los que integran la partición le llamamos clase de equivalencia, y en cada clase encontramos elementos que se dicen equivalentes entre sí.
- En resumen, diremos que siendo *R* una relación de equivalencia sobre un conjunto *A*, para cualquier $x \in A$ la clase de equivalencia de *x* , se define como

$$[x] = \left\{ y \in A \mid (y,x) \in R \right\}.$$

RELACIÓN DE EQUIVALENCIA

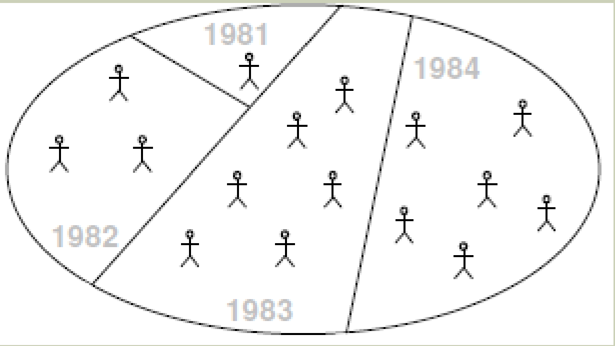
Ejemplo: considere el conjunto de alumnos del grupo, y la relación *"nació en el mismo año que"*. Observe que la relación es:

- reflexiva (cada uno nació en el mismo año que si mismo),
- s simétrica (si un alumno nació en el mismo año que otro, aquél nació en el mismo año que el primero),
- transitiva (si un alumno nació en el mismo año que un segundo alumno y este segundo alumno nació en el mismo año que un tercero, el primero nació en el mismo año que el tercero).

Tenemos que la relación es de equivalencia,

y divide al grupo en clases de equivalencia

según el año en el que nacieron.



PARTICIÓN DE UN CONJUNTO

Dado un conjunto A, A$\neq\emptyset$, $A_i \subseteq A$, $A_i \neq \emptyset$. Entonces $\{A_i\}$ es una **partición** de A si:

- $\mathrm{A} = \bigcup_i A_i$. La unión de todos los subconjuntos es A

- Los subconjuntos A_i son disjuntos dos a dos: $A_i \cap A_j = \emptyset \ \ \forall i \neq j$

Ejercicio:

Sea A el conjunto de los dígitos decimales, diga si las siguientes son particiones de A .

1. {{0,1,2,3,4,5},{5,6,7,8,9}}
2. {{2,4,6,8},{1,3,5,7,9}}
3. {{0,4,8},{1,5,9},{2,6},{3,7}}

RELACIÓN DE EQUIVALENCIA- CONJUNTO COCIENTE

Conjunto cociente

Al conjunto de todas las clases de equivalencia definidas por R sobre A, lo llamaremos conjunto cociente y lo representaremos como A/ R.

Ejemplo:

Considere el conjunto de los números racionales $Q = \left\{ \frac{a}{b} \ / \ a \in Z, b \in Z^* \right\}$

y la relación R definida de la siguiente forma $\left(\frac{a}{b}, \frac{c}{d}\right) \in R \leftrightarrow ad = bc$.

La relación contiene las parejas de fracciones equivalentes, y divide a Q en clases de equivalencia de fracciones equivalentes.

El conjunto cociente Q/ R contiene las clases de equivalencia.

RELACIÓN DE ORDEN

Cuando una relación es reflexiva, antisimétrica y transitiva decimos que es una **relación de orden**.

Consideremos el ejemplo anterior, la relación *"no tiene una cédula menor que la de"* es:

- reflexiva (nadie puede tener una cédula menor que su cédula),
- antisimétrica (si un alumno no tiene una cédula menor que la de otro, y este otro no tiene una cédula menor que la del primero, sus cédulas deben ser iguales y por tanto deben ser el mismo alumno)
- transitiva (si un alumno no tiene una cédula menor que la de un segundo alumno, y este segundo alumno no tiene una cédula menor que la de un tercero, el primer alumno no tiene una cédula menor que la del tercero).

RELACIONES

Ejercicio

Considere el conjunto de los dígitos binarios y analice la relación de igualdad y una relación que contiene los pares de la forma $(x, 1-x)$.

Represente la relación con arcos entre diagramas de Venn, como digrafo y como matriz.

Verifique si cumplen las propiedades de reflexividad, simetría, antisimetría y transitividad.

Diga en cada caso si se trata de una relación de equivalencia (y de ser así cuales son las clases de equivalencia) y una relación de orden.

RELACIÓN DE ORDEN-CONJUNTOS ORDENADOS

- Se llama conjunto parcialmente ordenado a cualquier conjunto S con un de orden parcial R y se denota (S,R).
- Se dice que dos elementos a y b de un conjunto parcialmente ordenado (S,$\preccurlyeq$) son **comparables** si se tiene que bien $a \preccurlyeq b$ o bien $b \preccurlyeq a$. En caso contrario se dice que no son comparables.
- Si (S,$\preccurlyeq$) es un conjunto parcialmente ordenado y cada dos elementos de S son comparables, se dice que S es un conjunto **totalmente ordenado**. Y que $\preccurlyeq$ es un orden total.
- Ejemplos:

1) La relación inclusión $\subseteq$ es un orden parcial en el conjunto de partes de un conjunto S.

2) (Z,$\leq$) esta totalmente ordenado.

CONJUNTOS ORDENADOS

- a es <u>**maximal**</u> de un conjunto parcialmente ordenado (S,$\preccurlyeq$) si no hay ningún elemento b$\in$S tal que $a \prec b$.
- Analogamente a es <u>**minimal**</u> de un conjunto parcialmente ordenado (S,$\preccurlyeq$) si no hay ningún elemento b$\in$S tal que $b \prec a$.
- Retículo, pag 489 de Rosen