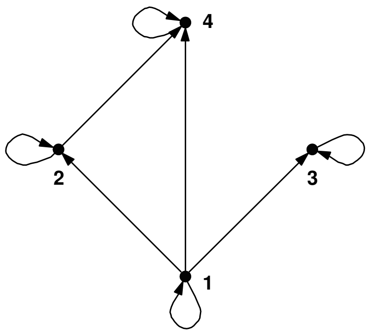
Relaciones

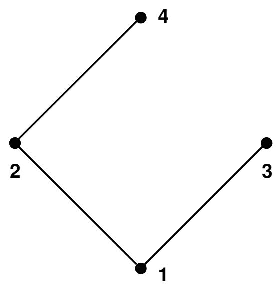
Relaciones de orden y diagramas de Hasse

Ya hemos definido una relación de orden (parcial) como aquella relación que es reflexiva, antisimétrica y transitiva. Sea la relación $R = \{(1,1),(1,2),(1,3),(1,4),(2,2),(2,4),(3,3),(4,4)\}$ binaria sobre el conjunto $A = \{1,2,3,4\}$. Podríamos representar el digrafo de la relación como sigue:



Si sabemos que una relación es un orden parcial podemos eliminar los bucles de su digrafo (sabemos que la relación es reflexiva). Como también sabemos que la relación es transitiva, podemos eliminar todas las aristas de la forma (x,z) cuando existen aristas (x,y) e (y,z). Si se adopta el convenio de leer el diagrama de abajo hacia arriba, no es necesario dirigir las aristas.

Un diagrama construido de esta forma se denomina Diagrama de Hasse. El diagrama de Hasse de R quedaría como sigue:



Una forma procedural (un algoritmo) para construir el diagrama de Hasse de una relación que es un orden parcial podría ser el siguiente:

- Para cada elemento (x,y) de la relación R, dibujar una arista hacia arriba de x hacia y, sólo si no existen en R elementos de la forma (x,m) y (m,y).

Es evidente a estas alturas que una relación binaria en un conjunto puede definir un orden sobre los elementos del conjunto. Formalizaremos esta idea definiendo el concepto de conjunto parcialmente ordenado.

Diremos que (A,R) es un conjunto parcialmente ordenado, cuando R es un orden parcial sobre A.

Ejercicio

Considere $A = \{1,2,3\}$ y la relación $\subseteq$ en el conjunto potencia de $A : P(A)$. Verifique que la relación es un orden parcial y dibuje el diagrama de Hasse de la misma.

Orden parcial y orden total

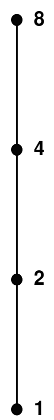
Notará el lector que de alguna forma un orden parcial permite determinar que algunos elementos son “mayores” o “menores” que otros. En el caso del ejercicio anterior, el conjunto $\{1,2\}$ es “mayor” que el conjunto $\{1\}$. Pero, ¿qué se puede decir de los conjuntos $\{1,2\}$ y $\{1,3\}$? Por este motivo venimos hablando de órdenes parciales, pues dados dos elementos cualesquiera no siempre se podrá decir que uno es “mayor” al otro en la relación. Cuando esto sucede, tenemos un orden total entre los elementos del conjunto.

R es un orden total sobre A si R es un orden parcial sobre A y $\forall x, y \in A, \left((x, y) \in R \vee (y, x) \in R\right)$

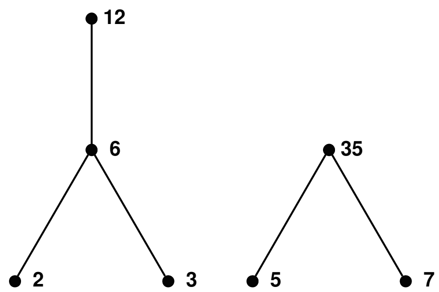
Si R es un orden total sobre A diremos que (A, R) es un conjunto totalmente ordenado.

Consideremos los conjuntos $A = \{1,2,4,8\}$ y $B = \{2,3,5,6,7,12,35\}$ y la relación $R = \left\{(x, y) \mid \frac{y}{x} \in Z\right\}$

Si dibujamos los diagramas de Hasse resulta evidente que la relación R define un orden total sobre A, pero sólo un orden parcial sobre B.



R es un orden total sobre A



R es un orden parcial sobre B

Elementos maximales y minimales, máximos y mínimos, cotas, supremos e ínfimos

Si (A,R) es un conjunto parcialmente ordenado, decimos que:

- $x \in A$ es maximal de A si $\forall a \in A, a \neq x \to (x,a) \notin R$
- $y \in A$ es minimal de A si $\forall b \in A, b \neq y \to (b,y) \notin R$

- $x \in A$ es máximo de A si $\forall a \in A, (a,x) \in R$
- $y \in A$ es mínimo de A si $\forall b \in A, (y,b) \in R$

Si (A,R) es un conjunto parcialmente ordenado y $B \subseteq A$, decimos que:

- $x \in A$ es cota superior de B si $\forall b \in B, (b,x) \in R$
- $y \in A$ es cota inferior de B si $\forall b \in B, (y,b) \in R$

- $x \in A$ es supremo de B si x es cota superior de B y $\forall x'$ cota superior de B, $(x,x') \in R$
- $y \in A$ es ínfimo de B si y es cota inferior de B y $\forall y'$ cota inferior de B, $(y',y) \in R$

Teorema:

Si (A,R) es parcialmente ordenado y A es finito, entonces A tiene un elemento maximal y uno minimal.

Para probar la existencia del elemento maximal, consideremos $A = \{a_1, a_2, ..., a_n\}$, con cada elemento de A pueden suceder dos cosas:

a_1 : o bien $\neg\exists a_2 \in A, a_2 \neq a_1 \mid (a_1,a_2) \in R \to a_1$ es maximal
o bien $\exists a_2 \in A, a_2 \neq a_1 \mid (a_1,a_2) \in R$, y entonces para a_2 se tiene

a_2 : o bien $\neg\exists a_3 \in A, a_3 \neq a_2, a_3 \neq a_1 \mid (a_2,a_3) \in R \to a_2$ es maximal
o bien $\exists a_3 \in A, a_3 \neq a_2, a_3 \neq a_1 \mid (a_2,a_3) \in R$, y entonces para a_3 se tiene

...

a_n : o bien $\neg\exists a_{n+1} \in A, a_{n+1} \neq a_n, ..., a_{n+1} \neq a_1 \mid (a_n, a_{n+1}) \in R \to a_n$ es maximal
o bien $\exists a_{n+1} \in A, a_{n+1} \neq a_n, ..., a_{n+1} \neq a_1 \mid ...$ **Absurdo !**

Se tiene entonces que o bien a_1 es maximal, o bien a_2 es maximal,... o bien a_n es maximal.
Se puede demostrar la existencia del elemento minimal de forma análoga.

Teorema:

Si (A,R) parcialmente ordenado tiene un máximo es único.

Se puede demostrar la unicidad suponiendo la existencia de dos máximos m_1 y m_2. Como m_1 es máximo $(m_2,m_1) \in R$ y como m_2 es máximo $(m_1,m_2) \in R$. Al ser R antisimétrica, $m_1 = m_2$.

Retículo

Diremos que (A,R) es un retículo cuando $\forall x,y \in A, (\sup\{x,y\} \in A \wedge \inf\{x,y\} \in A)$

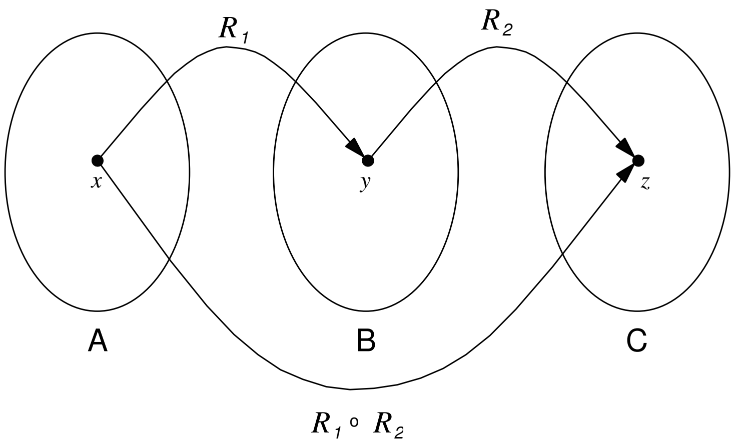
Composición de relaciones

Como ya hemos dicho las relaciones son conjuntos, y por lo tanto están definidas para las relaciones las operaciones binarias de unión, intersección, diferencia y diferencia simétrica sobre conjuntos. Vimos también dos operaciones unarias sobre relaciones llamadas inversa y complementaria.

Definiremos para las relaciones una operación más, llamada composición de relaciones.

Sean $R_1 \subseteq A \times B$ y $R_2 \subseteq B \times C$, definimos la composición de R_1 y R_2 como:

$$R_1 \circ R_2 = \{(x,z) \in A \times C \mid \exists y \in B : (x,y) \in R_1 \wedge (y,z) \in R_2\}$$



Una forma de representación que será particularmente útil para la composición de relaciones es la matricial. El producto de las matrices de relación para R_1 y R_2, en ese orden, es igual a la matriz de la relación compuesta $R_1 \circ R_2$:

$$M(R_1).M(R_2) = M(R_1 \circ R_2)$$

Note el lector que siempre está definido el producto de matrices ya que la dimensión de $M(R_1)$ es $|A| \times |B|$ mientras que la dimensión de $M(R_2)$ es $|B| \times |C|$.

Ejercicio

Una empresa tiene tres sistemas de bases de datos: Oracle, SQL Server y DB2, y para administrarlos cuenta con 5 administradores de base de datos (DBAs): Alberto (que administra Oracle y DB2), Bernardo (que sólo administra SQL Server), Carlos (que administra Oracle y SQL Server), Diego (que administra SQL Server y DB2) y Esteban (que sólo administra DB2).

Por motivos de presupuesto la empresa tiene contratados los servicios de cada DBA por 2 días a la semana (no sabemos si esto guarda relación con el mítico manual de Oracle: *"2 Day DBA"*). Si los lunes trabajan Alberto y Bernardo, los martes trabajan Carlos y Esteban, los miércoles trabajan Carlos y Diego, los jueves trabajan Alberto y Diego, y los viernes trabajan Bernardo y Esteban, ¿hay algún día de la semana en el que falte DBA para alguno de los sistemas?