INDUCCION MATEMÁTICA

RELACIONES DE RECURRENCIA

Tecnólogo en Informática. Sede Maldonado

Matemática Discreta y Lógica I. Primer semestre.

Principio de buena ordenación

Consideremos el conjunto de los enteros positivos $\mathbf{Z}^+$

Principio del buen orden:

Cualquier subconjunto no vacío de $\mathbf{Z}^+$ contiene un elemento mínimo.

Y diremos que el conjunto $\mathbf{Z}^+$ es bien ordenado.

Inducción matemática

Sea $S(n)$ una proposición en la que aparece una o más veces la variable n, que representa un entero positivo.

Si se cumple que:

$S(1)$ verdadera, y

$S(k)$ verdadera $\rightarrow S(k+1)$ verdadera

Entonces $S(n)$ es verdadera para todo $n \in Z^{+}$.

Sucesiones: definición

Una sucesión de números reales **es una función** cuyo **dominio** es el conjunto de los **números naturales N** y cuyo **recorrido** está **contenido** en el conjunto de los **números reales R** .

f: $N\rightarrow R$ tal que $f(n) = n^2 - 3$; en forma abreviada $f_n = n^2 - 3$ o también $a_n = n^2 - 3$.

Notación:

(a_n) es la sucesión , indica la función a: $N\rightarrow R$

a_n es el término general, es un número Real

$\{a_n\}$ es el recorrido de la sucesión.

Formas de definir sucesiones:

1) **Explícita**: se da una fórmula para el término general, como se vio en los ejemplos anteriores.

2) Dando **u**na **Lista** o una propiedad.

3) **Recurrencia**: se da el primer término y un método general que permita calcular los demás a partir del anterior o anteriores, como veremos a continuación.

Definiciones Recursivas

Algunas veces es difícil definir objetos explícitamente, sin embargo, puede resultar sencillo definirlos en términos de ellos mismos. Este proceso se llama **recursión**.

Podemos utilizar la recursión para definir sucesiones, funciones y conjuntos.

Cuando definimos sucesiones recursivamente, especificamos como encontrar los términos a partir de términos anteriores. Cuando definimos conjuntos recursivamente, especificamos algunos elementos iniciales en un **paso base** y proporcionamos, en el **paso recursivo**, una regla para construir nuevos elementos a partir de los que ya tenemos.

Ejemplos:

1)

$$\begin{cases} a_0 = 3 \\ a_{n+1} = 2a_n + 1 \end{cases}$$

Los primeros términos son: 3, 7, 15, 31…

2) Un ejemplo de definición recursiva con más de un caso base son los números de Fibonacci:

$$\begin{cases} F(0) = 0 \\ F(1) = 1 \qquad\qquad n \in N, n \geq 2 \\ F(n) = F(n-1) + F(n-2) \end{cases}$$

3) Definición recursiva de la función Factorial $F(n) = n!$ de la siguiente forma:

$$\begin{cases} 0! = 1 \\ n! = n.(n-1)! \end{cases}$$

Ecuaciones de Recurrencia

Una **ecuación de recurrencia lineal de orden k con coeficientes constantes** es una relación

$$c_n a_n + c_{n-1}\, a_{n-1} + c_{n-2} a_{n-2} + \cdots + c_{n-k} a_{n-k} = b_n, n \geq k$$

donde $c_n, c_{n-1}, \cdots, c_{n-k}$ son constantes $\neq 0$ y b_n es una sucesión conocida.

Diremos que es **homogénea** si $\boldsymbol{b_n = 0}$.

Ecuación de recurrencia lineal de primer orden

Sea $(a_n): a_n = 3a_{n-1}$, esta expresión no define una única progresión geométrica, debemos dar las condiciones iniciales.

Sea entonces $(a_n): a_n = 3a_{n-1}$ con $n \geq 1$ y $a_0 = 5$

Esta ecuación de recurrencia $a_n = 3a_{n-1}$ depende del elemento inmediato anterior, por eso decimos que es de primer orden.

$a_0 = 5$

$a_1 = 3a_0 = 3 \cdot 5$

$a_2 = 3a_1 = 3 \cdot 3 \cdot 5 = 3^2 \cdot 5$

$a_3 = 3a_2 = 3 \cdot 3^2 \cdot 5 = 3^3 \cdot 5$

$\vdots$

$a_n = 3^n \cdot 5$ esta es la solución de la ecuación de recurrencia.

Ecuación de recurrencia lineal de primer orden

De forma general, la solución de la relación de recurrencia:

$$\begin{cases} a_0 = C \\ a_n = k.a_{n-1}, n \geq 1 \end{cases}$$

está dada por $\boldsymbol{a_n = C.k^n, n \geq 0}$.

Una forma alternativa de escribir $a_n = k.a_{n-1}$ es $a_n - k.a_{n-1} = 0$.

Cuando estas diferencias (las relaciones de recurrencia también suelen llamarse ecuaciones en diferencias) dan siempre cero, la relación se llama homogénea.

Ecuación de recurrencia lineal de segundo orden

- $c_n a_n + c_{n-1} a_{n-1} + c_{n-2} a_{n-2} = 0 \ , n \geq 2$ (homogénea)
- Se busca una solución de la forma $\boxed{a_n = Ar^n}$
- Sustituyendo en $c_n a_n + c_{n-1} a_{n-1} + c_{n-2} a_{n-2} = 0$
- $c_n Ar^n + c_{n-1} Ar^{n-1} + c_{n-2} Ar^{n-2} = 0$
- Factorizando se obtiene
- $Ar^{n-2}(c_n r^2 + c_{n-1} r + c_{n-2}) = 0 \Leftrightarrow$
- $c_n r^2 + c_{n-1} r + c_{n-2} = 0$ (pues $Ar \neq 0$)
- $c_n r^2 + c_{n-1} r + c_{n-2} = 0$ se llama polinomio **característico**

Resolvemos y según las raíces del polinomio característico, las soluciones de las ecuaciones de recurrencia pueden ser de dos tipos:

- dos raíces distintas: r_1 y r_2 (reales), entonces la solución es

$$\boxed{a_n = \alpha \cdot {r_1}^n + \beta \cdot {r_2}^n}$$

- una raíz doble

$$\boxed{a_n = \alpha \cdot r^n + \beta \cdot n \cdot r^n}$$

Usando las condiciones iniciales, determinamos α y β.

Ejemplos:

1) Resolver: $\begin{cases} a_n + a_{n-1} - 6a_{n-2} = 0\,, & n \geq 2 \\ a_0 = 1, a_1 = 2 \end{cases}$

El polinomio característico $x^2 + x - 6 = 0$ tiene dos raíces reales y distintas que son 2 y -3, entonces la solución general es: $a_n = \alpha 2^n + \beta(-3)^n$

Para determinar α y β con las condiciones iniciales $a_0 = 1\,, a_1 = 2$ y obtenemos un sistema de ecuaciones $\begin{cases} \alpha + \beta = 1 \\ 2\alpha - 3\beta = 2 \end{cases}$ cuya solución es $\alpha = 1, \quad \beta = 0 \quad \Longrightarrow$ la solución de la ecuación de recurrencia es $a_n = 2^n$

Ecuación de recurrencia lineal no homogénea

$$c_n a_n + c_{n-1}\, a_{n-1} + c_{n-2} a_{n-2} + \cdots + c_{n-k} a_{n-k} = b_n, n \geq k$$

Con $(b_n) = f(n) \neq 0$ **(I)**

Se le llama *ecuación de recurrencia no homogénea y* se le asocia una ecuación homogénea:

$$c_n a_n + c_{n-1}\, a_{n-1} + c_{n-2} a_{n-2} + \cdots + c_{n-k} a_{n-k} = 0$$

Propiedad

Cualquier solución (a_n) de la ecuación **(I),** se puede escribir de la forma $\boldsymbol{a_n = p_n + h_n}$**,** donde $\boldsymbol{p_n}$ es una solución particular de **(I)** y $\boldsymbol{h_n}$ es la solución de la ecuación homogénea asociada.

Ejemplos de cómo hallar una solución particular en diferentes casos :

Ya se vio en la parte anterior como hallar la solución de la ecuación de recurrencia homogénea.

Para obtener una solución particular no hay un método general. Veamos el siguiente ejemplo:

$a_n + 2a_{n-1} = 3$. En este caso $b_n = 3$. Se puede "sospechar" que una solución particular de esta ecuación puede ser de la forma $p_n = A$ (siendo A una constante). Si sustituimos en la ecuación se obtiene: $\mathrm{A} + 2\mathrm{A}=3 \Longrightarrow A = 1$. Por lo tanto $p_n = 1$ es una solución particular.

En resumen:

1) Si b_n es un múltiplo constante de una de las formas de la primera columna de la tabla siguiente y no es solución de la ecuación homogénea asociada, entonces la solución particular p_n tiene la forma que se muestra en la segunda columna.

$\boldsymbol{b_n}$	$\boldsymbol{p_n}$
K	A
n	$An + B$
n^2	$An^2 + Bn + C$
r^n	Ar^n
n^2r^n	$r^n(An^2 + Bn + C\ )$

2) Cuando b_n es una suma de múltiplos constantes de términos como los de la primer columna (y ninguno de estos es solución de la ecuación homogénea asociada), entonces la solución particular se forma como la suma de los términos correspondientes en la segunda columna.

3) Si b_n (o algún término de b_n) es un múltiplo constante de una solución de la ecuación homogénea asociada, multiplicamos la solución particular correspondiente a ese sumando por la mínima potencia de *n*, *nt* para la que ningún sumando de la nueva expresión sea una solución de la ecuación homogénea asociada (Si p_n se "solapa" con h_n , multiplicamos p_n por la menor potencia de *n* que evite dicho "solapamiento").