Carrera de Tecnólogo en Informática
Matemática Discreta y Lógica 1
Solución Primer Parcial de fecha 13/11/07

Ejercicio 1 **4 puntos**

La respuesta correcta es la 3), $A - B = \{3, 5, 6\}$.

Ejercicio 2 **5 puntos**

Para probar que $\equiv$ es una relación de equivalencia hay que probar que es reflexiva, simétrica y transitiva.

1. *equiv* es reflexiva pues $amod2 = amod2$.
2. *equiv* es simetrica pues si $amod2 = bmod2$ entonces $bmod2 = amod2$.
3. *equiv* es transitiva pues si $amod2 = bmod2$ y $bmod2 = cmod2$ entonces $amod2 = cmod2$.

El número de elementos en $Z/\equiv$ es dos, las clases de equivalencia son: los números pares y los números impares.

Ejercicio 3 **9 puntos**

Para probar que R es un orden parcial sobre Z tenemos que demostrar que es reflexiva, antisimétrica y transitiva.

1. R es reflexiva pues $min(a, a) = a$
2. R es antisimétrica pues si $min(a, b) = a$ y $min(b, a) = b$, como $min(a, b) = min(b, a)$ entonces $a = b$.
3. R es transitiva pues si $min(a, b) = a$ y $min(b, c) = b$ entonces $a \leq b$ y $b \leq c$ de lo que se deduce $a \leq c$ es decir $min(a, c) = a$.

Sea $A = \{4, 6, 12\}$. El diagrama de Hasse es :

12
|
|
6
|
|
4

R es total pues dados $a, b \in A$ o aRb o bRa. El elemento maximal es el 12. El elemento minimal es 4. El máximo es 12, el mínimo es 4. (A, R) es un retículo.

Ejercicio 4 **9 puntos**

1. $f(2) = 2$ y $f(-2) = 2$ es decir existen a, b con $a \neq b$ y $f(a) = f(b)$ luego f es no inyectiva.
2. Dado $x \in N$ existe un elemento $y \in Z$ tal que $f(y) = x$ alcanza con tomar $y = x$ luego f es sobreyectiva.
3. Si $x \neq y$ entonces $x + 2 \neq y + 2$ luego g es inyectiva.
4. Dado $0 \in N$ no existe $y \in N$ tal que $g(y) = 0$, luego g es no sobreyectiva.
5. f no es invertible pues no es inyectiva.
6. g no es invertible pues no es sobreyectiva.

Ejercicio 5 **5 puntos**

Solución en el teórico.

Ejercicio 6 **3 puntos**

Demuestre utilizando inducción completa:

$\sum_{i=1}^{n}(2i-1) = n^2$

1. paso base $\sum_{i=1}^{1}(2i-1) = 1$
2. hipótesis induictiva $\sum_{i=1}^{n}(2i-1) = n^2$ tesis inductiva $\sum_{i=1}^{n+1}(2i-1) = (n+1)^2$.

   Se cumple

   $\sum_{i=1}^{n+1}(2i-1) = \sum_{i=1}^{n}(2i-1) + (2(n+1)-1)$
   $= n^2 + (2(n+1)-1) = n^2 + (2n+2-1) = n^2 + 2n + 1 = (n+1)^2$.

Ejercicio 7 **4 puntos**

Para hallar la solución hay que resolver la ecuación de segundo grado

$$r^2 + r - 6 = 0$$

que tiene como soluciones 2 y -3. La solución general es entonces:

$$a_n = p.2^n + q.(-3)^n$$

Para hallar la solución particular sustituimos n por 0 y por 1, obtenemos:

$a_0 = p + q = 1$
$a_1 = 2p - 3q = 2$

es decir un sistema de dos ecuaciones con dos incognitas, la solución es $q = 0$ y $p = 1$, luego la solución particular es

$$a_n = 2^n$$