Carrera de Tecnólogo en Informática
Matemática Discreta y Lógica 1
Solución del Primer Parcial – Turno nocturno
07/09/2007

Instrucciones

- Se leerá la letra y tendrá dos horas para realizar el parcial a partir de ese momento
- El parcial es una prueba de carácter individual y no se puede consultar material
- Lea atentamente la letra antes de contestar cada ejercicio
- A menos que el ejercicio sea de múltiple opción, fundamente todos sus razonamientos
- Los ejercicios múltiple opción bien respondidos suman 4 puntos, y mal respondidos restan 1
- El parcial suma 40 puntos

Ejercicio 0 (1 punto)

Numere las hojas que entregue, incluya nombre y número de cédula en cada hoja, y registre en la primer hoja el total de hojas entregadas.

Ejercicio 1 (bien respondido 4 puntos, mal respondido -1)

Sea $R \subseteq A \times B$ una relación, indique la única respuesta correcta:

a) Si $A = B$ y R es simétrica, $\overline{R}$ no puede ser simétrica
b) Si $A = B$ y R es simétrica, $\overline{R}$ puede no ser simétrica
c) Si A y B son finitos y R es una función sobreyectiva, $|A| \geq |B|$
d) Si $A \subseteq B$ y R es una función sobreyectiva, $A = B$
e) Ninguna de las anteriores es correcta

Solución:

Opción c. Vimos en el curso que si una función es sobreyectiva todo elemento del codominio tiene (por lo menos) una preimagen, con lo cual, si los conjuntos son finitos, la cardinalidad del dominio debe ser mayor o igual que la del codominio.

Ejercicio 2 (4 puntos)

Sea $f : N \to N \,/\, f(x) = x + 1$. Muestre que f es inyectiva y determine si es invertible.

Solución:

Sean $n, m \in N \,/\, n \neq m$. Sin pérdida de generalidad supongamos que $n > m$, y (por monotonía de la suma) tenemos que $n + 1 > m + 1$ con lo cual $n + 1 \neq m + 1$. Utilizando la definición de f tenemos que $f(n) \neq f(m)$ con lo cual hemos demostrado la inyectividad de f.

Demostraremos que f no puede ser invertible por no ser biyectiva, al no cumplirse la sobreyectividad. Como $\forall n \in N, n \geq 0 \to \forall n \in N, n + 1 \geq 1$ tenemos entonces que $\forall n \in N, f(n) \geq 1$ lo que es equivalente a decir que $\neg \exists n \in N \,/\, f(n) < 1$, y en particular $\neg \exists n \in N \,/\, f(n) = 0$. Encontramos un elemento del codominio que no tiene preimagen por lo cual la sobreyectividad no se cumple.

Ejercicio 3 (4 puntos)

Considere la relación de recurrencia siguiente:

$$\begin{cases} a_0 = 1 \\ a_1 = 2 \\ a_{n+2} = a_{n+1} - \frac{1}{4} a_n & \forall n \geq 0 \end{cases}$$

Exprese la relación de recurrencia como una ecuación en diferencias y resuélvala (implica hallar la solución general y particular).

Solución:

Despejando y multiplicando por 4 en ambos lados de la igualdad en la fórmula del caso recursivo de la relación de recurrencia, la ecuación en diferencias se puede expresar como:

$$4a_{n+2} - 4a_{n+1} + a_n = 0$$

Tenemos así una ecuación en diferencias lineal y homogénea de segundo orden. La ecuación característica de esta ecuación en diferencias es:

$$4r^2 - 4r + 1 = 0$$

Esta ecuación tiene una raíz doble $\frac{1}{2}$ por lo que la solución general de la ecuación en diferencias es de la forma:

$$a_n = p\left(\frac{1}{2}\right)^n + qn\left(\frac{1}{2}\right)^n$$

Utilizando las condiciones iniciales llegamos a que $p = 1$ y $q = 3$, quedando la solución particular:

$$a_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n + 3n\left(\frac{1}{2}\right)^n = (1+3n)\left(\frac{1}{2}\right)^n$$

Ejercicio 4 (4 puntos)

Sea $A = \{1,2,3,4\}$. ¿Cuántas relaciones R $(R \subseteq A \times A)$ son simétricas y tienen a todos los elementos de $A \times A$ de la forma $(x, x+1)$? ¿Cuántas de éstas son funciones? Justifique su respuesta.

Solución:

Los elementos de $A \times A$ de la forma $(x, x+1)$ son $(1,2)$, $(2,3)$ y $(3,4)$. Si consideramos la matriz de cualquier posible relación R veremos que hay varias entradas que están determinadas (por los elementos que obligatoriamente deben estar en R y por la simetría).

	(1)	(2)	(3)	(4)
(1)	x	1	x	x
(2)	1	x	1	x
(3)		1	x	1
(4)			1	x

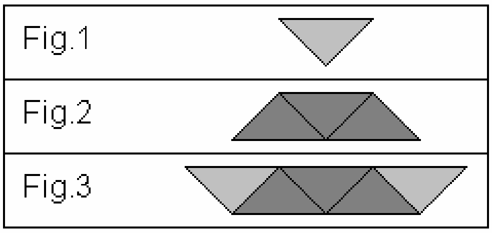
Las entradas “libres” (marcadas con una “x”) pueden tomar el valor cero o uno (dos valores), y las posibles relaciones se forman con las combinaciones de valores de estas entradas. Al existir 2^7 formas de combinar ceros y unos en las 7 entradas “libres” de la matriz de la relación, hay 2^7 relaciones posibles.

Ninguna de las relaciones posibles es función, ya que la pertenencia de los elementos $(2,1)$ y $(2,3)$ violan la definición de función.

Ejercicio 5 (5 puntos)

Considere un juego en el que se tienen dos figuras básicas: una con un triángulo (figura 1 en la imagen) y otra con tres triángulos (figura 2 en la imagen), y se pretenden construir nuevas figuras cada vez mayores siguiendo una regla: se debe usar la figura anterior una sola vez, y la anterior de la anterior dos veces.

A modo de ejemplo, la figura 3 de la imagen se construyó utilizando una vez la figura 2 y dos veces la figura 1.



La figura 4 se construiría utilizando la figura 3 una vez, y la figura 2 dos veces.

Se desea determinar el número de triángulos elementales en la figura n-ésima. Utilice una ecuación en diferencias para modelar el problema y resuélvalo. ¿Cuántos triángulos elementales tendría la figura 8 construida de esta manera?

Solución:

La ecuación en diferencias que modela el problema ($a_n =$ número de triángulos de la figura n) es la siguiente:

$a_n = a_{n-1} + 2a_{n-2} \quad \forall n \geq 1$, con $a_1 = 1$ y $a_2 = 3$.

La ecuación característica $r^2 - r - 2 = 0$ tiene raíces 2 y -1, por lo que la solución general es:

$$a_n = p.2^n + q.(-1)^n$$

Utilizando las condiciones iniciales, tenemos que $p = 2/3$ y $q = 1/3$, por lo que:

$$a_n = 2/3 .2^n + 1/3 .(-1)^n$$

Finalmente: $a_8 = 2/3 .2^8 + 1/3 = 171$

Ejercicio 6 (6 puntos)

Se desean formar comisiones integradas por una o más personas, a partir de los integrantes de una delegación de representantes de varios países. Para que las comisiones sean fructíferas los integrantes de las mismas se deben poder comunicar entre sí (dos personas se pueden comunicar si hablan un idioma común, o si un tercero se puede comunicar con ambos). Los representantes y los idiomas que hablan son los siguientes:

Representante de	**Habla**
Canadá	Inglés y francés
Uruguay	Español
Inglaterra	Inglés
España	Español
Francia	Francés

Modele el problema utilizando relaciones para determinar la relación "hablan un idioma común" y "se pueden comunicar". ¿Es de equivalencia la relación "se pueden comunicar"? Justifique. De ser así, determine cuántas clases de equivalencia define, halle el conjunto cociente y proponga una posible división de la delegación en comisiones y un delegado por comisión.

Solución:

Las personas P y Q hablan un idioma común si existe un idioma X tal que P habla un idioma X y el idioma X es hablado por Q. Esto es la composición de las relaciones "habla" y "es hablado por" que se deducen directamente de la letra:

	(C)	(U)	(I)	(E)	(F)
(I)	**1**		**1**		
(F)	**1**				**1**
(E)		**1**		**1**	

	(I)	(F)	(E)
(C)	**1**	**1**	
(U)			**1**
(I)	**1**		
(E)			**1**
(F)		**1**	

1		**1**		**1**
	1		**1**	
1		**1**		
	1		**1**	
1				**1**

Luego, A se puede comunicar con B si existe una persona C tal que A habla un idioma común con C y C habla un idioma común con B. Esto es la composición de la relación "habla un idioma común" consigo misma:

	(C)	(U)	(I)	(E)	(F)
(C)	**1**		**1**		**1**
(U)		**1**		**1**	
(I)	**1**		**1**		
(E)		**1**		**1**	
(F)	**1**				**1**

	(C)	(U)	(I)	(E)	(F)
(C)	**1**		**1**		**1**
(U)		**1**		**1**	
(I)	**1**		**1**		
(E)		**1**		**1**	
(F)	**1**				**1**

1		**1**		**1**
	1		**1**	
1		**1**		**1**
	1		**1**	
1		**1**		**1**

La relación "se pueden comunicar" es de equivalencia. Esto se puede demostrar fácilmente a partir de la matriz de la relación ya que es reflexiva $\left(I \leq M(R)\right)$, simétrica $\left(M(R) = M^T(R)\right)$ y transitiva $\left(M^2(R) \leq M(R)\right)$.

Construyendo el dígrafo es fácil ver que hay dos componentes conexas, y por lo tanto dos clases de equivalencia:

$[C] = \{C, I, F\}$ y $[U] = \{U, E\}$. El conjunto cociente $A/R = \{[C], [U]\}$

Una propuesta podría ser que los representantes de Canadá, Inglaterra y Francia formaran una comisión; mientras que los de Uruguay y España formaran otra. El representante de Canadá podría ser el delegado de la primer comisión y el delegado de Uruguay el de la segunda.

Ejercicio 7 (4 puntos)

Construya un circuito óptimo de tres entradas: x, y, z ; que determine si el número (en representación binaria) formado por xyz es divisible entre 4 (0 es divisible entre 4). Justifique sus razonamientos.

Solución:

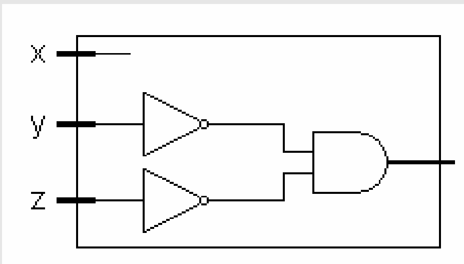
Los posibles números de 3 bits van del cero al siete, y sólo cero (000) y cuatro (100) son divisibles entre cuatro.

$z \setminus xy$	0 0	0 1	1 1	1 0
0	1			1
1				

Minimizando la suma de productos canónicos por Karnaugh, tenemos:

$$div\_entre\_4(x, y, z) = \overline{y}\,\overline{z}$$

Y el circuito es:



Ejercicio 8 (4 puntos)

Evalúe si la semántica del código de una aplicación varía con el siguiente cambio de una línea:

```
// antes
// condition = "OLD.CALLE <> NEW.CALLE OR OLD.NRO_PUERTA <> NEW.NRO_PUERTA";

// después
condition = "NOT(OLD.CALLE = NEW.CALLE AND OLD.NRO_PUERTA = NEW.NRO_PUERTA)";
```

Solución:

Sabemos que el conjunto $\{NOT, AND\}$ es lógicamente completo, por lo que es posible escribir el OR a partir de ellos. Concretamente:

$$p\ OR\ q = NOT(NOT\ \ p\ OR\ NOT\ q)$$

Es válido entonces, reescribir la primera línea como:

```
condition = "NOT(NOT(OLD.CALLE <> NEW.CALLE) AND NOT(OLD.NRO_PUERTA <> NEW.NRO_PUERTA))";
```

Observando que $NOT(x <> y)$ es equivalente a $x = y$, podemos simplificar la línea anterior llegando a la línea modificada, por lo que el cambio mantiene la semántica del código.

Ejercicio 9 (4 puntos)

A las 4 de la tarde le solicitan saber si un backup en ejecución de una base de datos terminará antes de la jornada laboral (lo que ocurre a las 6 de la tarde). El DBA le envía el siguiente mail:

El backup empezó a las 3:01 y el tamaño (en hexa) es lo que está en negritas y subrayado:

2007-08-02-15.01.16.014367 Instance:adis32 Node:000
PID:2318574(db2agent (DAD033IS) 0) TID:1 Appid:*LOCAL.adis32.0003D2190114
database utilities sqlubcka Probe:0 Database:DAD033IS
Starting a full database backup.

2007-08-02-15.01.53.519377 Instance:adis32 Node:000
PID:2318574(db2agent (DAD033IS) 0) TID:1 Appid:*LOCAL.adis32.0003D2190114
database utilities sqlubcka Probe:128 Database:DAD033IS
Estimated size of backup in bytes:
0x0FFFFFFFFFFF5008 : **0x0000000AB8489000** .....H..

Los responsables de storage le envían este otro:

El throughput de la red de storage es de unos 10MB/seg

Calcule si el backup terminará antes de la jornada laboral. Justifique todos sus razonamientos.

Solución:

El tamaño del backup es de 0xAB8489000 bytes. Convirtiendo este valor a notación decimal tenemos 46041436160 bytes = 44962340KB = 43908MB ≅ 43GB

A una tasa de 10MB/seg, el backup llevará unos 4391 seg ≅ 74 minutos (1 hora, 14 minutos).

Considerando que el backup comenzó a las 15:01, a usted lo llamaron a las 16:00, y debió perder algunos minutos para conseguir esta información, leerla e interpretarla, la respuesta debería ser “está al terminar” (y definitivamente terminará antes de la jornada laboral).