Carrera de Tecnólogo en Informática
Matemática Discreta y Lógica 1
Solución Primer Parcial de fecha 16/11/07

Ejercicio 1 **4 puntos**

La respuesta correcta es la 4), : si R es de equivalencia es simétrica y por lo tanto la matriz de la relación es simétrica.

Ejercicio 2 **5 puntos**

Para probar que la relación (R) es una relación de equivalencia hay que probar que es reflexiva, simétrica y transitiva.

1. R es reflexiva pues una persona vive en el mismo departamento que ella misma.
2. R es simétrica pues si una persona vive en el mismo departamento que otra, la segunda vive en el mismo departamento que la primera.
3. R es transitiva pues si una primera persona vive en el mismo departamento que una segunda y la segunda vive en el mismo departamento que una tercera entonces la primera persona vive en el mismo departamento que la tercera.

Los elementos en el conjunto cociente son los conjuntos de personas que viven en el mismo departamento, luego hay 19 elementos en el conjunto cociente.

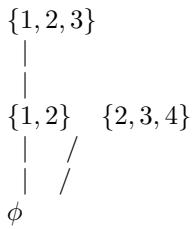
Ejercicio 3 **8 puntos**

Para probar que R es un orden parcial sobre $P(Z)$ tenemos que demostrar que es reflexiva, antisimétrica y transitiva.

1. R es reflexiva pues $A \subseteq A$
2. R es antisimétrica pues si $A \subseteq B$ y $B \subseteq A$ entonces $A = B$.
3. R es transitiva pues si $A \subseteq B$ y $B \subseteq C$ entonces $A \subseteq C$.

Consideremos $A = \{\phi, \{1,2\}, \{2,3,4\}, \{1,2,3\}\}$.

El diagrama de Hasse para R es:



R no es total pues dados $\{1,2\}$ y $\{2,3,4\}$ no están relacionados. Los elementos maximales son $\{2,3,4\}$ y $\{1,2,3\}$. El elemento minimal es ϕ. No hay máximo, el mínimo es ϕ. (A,R) no es un retículo pues $\{2\}$ (infimo de $\{1,2\}$ y $\{2,3,4\}$) no pertenece a A.

Ejercicio 4 **5 puntos**

Ver en teórico.

Ejercicio 5 **4 puntos**

Sea $f : N \times N \to N$, $f(x,y) = x + y$

1. $(1,2) \neq (2,1)$ y $f(1,2) = f(2,1)$ luego f no es inyectiva.
2. Dado x en N existe $y \in N \times N$ tal que $x = f(y)$, alcanza con tomar $y = (x,0)$ luego f es sobreyectiva.
3. f no es invertible pues no es inyectiva.

Ejercicio 6 **4 puntos**

Demuestre por inducción completa que la siguiente relación de recurrencia:

$a_0 = 0$
$a_n = a_{n-1} + n \qquad n \geq 0$

define una sucesión que cumple

$$\forall n \in N \, , a_n = \textstyle\sum_{i=0}^{n} i$$

1. paso base: $a_0 = 0 = \sum_{i=0}^{0} i$

2. paso inductivo
   Hipótesis: $a_{n-1} = \sum_{i=0}^{n-1} i$
   Tesis: $a_n = \sum_{i=0}^{n} i$

   Demostración:

   $a_n = a_{n-1} + n = \sum_{i=0}^{n-1} i + n = \sum_{i=0}^{n} i$

Ejercicio 7 **5 puntos**

Encuentre la solución general y particular de la siguiente ecuación en diferencias:

$a_0 = 0$
$a_1 = 1$
$a_n + 2a_{n-1} - 3a_{n-2} = 0 \qquad n \geq 2$

para hallar la solución de la ecuación en diferencias hay que resolver la siguiente euación de segundo grado:

$$r^2 + 2r - 3 = 0$$

que tiene como soluciones 1 y -3. Luego la solución general de la ecuación en diferencias es:

$$a_n = p.(1)^n + q.(-3)^n = p + q.(-3)^n$$

Para hallar la solución particular sustituimos n por 0 y por 1, obtenemos

$a_0 = p + q = 0$
$a_1 = p - 3q = 1$

es decir un sistema de dos ecuaciones con dos incognitas, la solución es $q = -1/4$ y $p = 1/4$, luego la solución particular es

$$a_n = 1/4 - 1/4.(-3)^n$$

Ejercicio 8 **4 puntos**

La respuesta correcta es: f es la inversa de g.