Carrera de Tecnólogo en Informática
Matemática Discreta y Lógica 1
Solución del segundo Parcial – Turno nocturno
01/11/2007

Ejercicio 0 (1 punto)

Numere las hojas que entregue, incluya nombre y número de cédula en cada hoja, y registre en la primer hoja el total de hojas entregadas.

Ejercicio 1 (12 puntos)

Sea $\Sigma = \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$ un alfabeto:

a) Defina inductivamente el lenguaje L_P de los números pares sobre el alfabeto Σ

b) Defina una función $next : L_P \to \Sigma^*$ que para cada palabra de L_P devuelva la palabra que representa el próximo número natural. Por ejemplo: $next(124) = 125$

c) Justifique la posibilidad (y en el caso de ser posible la facilidad) de definir una función $prev : L_P \to \Sigma^*$ que devuelva la palabra que representa el anterior número natural.

d) Enuncie el principio de inducción primitiva para L_P

a) Sea L_P el lenguaje definido inductivamente por:

i. $0 \in L_P$
ii. $2 \in L_P$
iii. $4 \in L_P$
iv. $6 \in L_P$
v. $8 \in L_P$
vi. Si $\alpha \in L_P$, entonces $x\alpha \in L_P$ con $x \in \Sigma$

b) Sea la relación $next : L_P \to \Sigma^*$ definida recursivamente como sigue:

i. $next(0) := 1$
ii. $next(2) := 3$
iii. $next(4) := 5$
iv. $next(6) := 7$
v. $next(8) := 9$
vi. $next(x\alpha) := x.next(\alpha)$

Sabemos que $next$ es función ya que la recursión es primitiva en L_P

c) No es posible definir la función $prev$, ya que el anterior de 0 no se puede representar con los símbolos del alfabeto.

d) Sea P una propiedad sobre L_P.

Si se cumplen $P(0)$, $P(2)$, $P(4)$, $P(6)$, $P(8)$ y que se cumpla $P(\alpha)$ implica que se cumple $P(x\alpha)$ para todo $\alpha \in L_P$ y $x \in \Sigma$; entonces podemos afirmar que se cumple $P(\alpha)$ para todo $\alpha \in L_P$

Ejercicio 2 (8 puntos)

Sea $\Sigma = \{a,b,c\}$ un alfabeto y una función $misterio : \Sigma^* \to \Sigma^*$, definida recursivamente por las ecuaciones:

i. $misterio(\varepsilon) = \varepsilon$
ii. $misterio(x\alpha) = misterio(\alpha)x$ con $x \in \Sigma$

a) Calcule $misterio(bca)$ y $misterio(abcb)$ justificando las ecuaciones que utiliza en cada paso
b) Defina inductivamente Σ^* de forma que la recursión de $misterio$ sea primitiva.
c) Conceptualmente, ¿que implementa la función $misterio$?

a) $misterio(bca) =_{(ii)} misterio(ca)b =_{(ii)} misterio(a)bc =_{(ii)} misterio(\varepsilon)abc =_{(i)} abc$

$misterio(abcb) =_{(ii)} misterio(bcb)a =_{(ii)} misterio(cb)ba =_{(ii)} misterio(b)cba =_{(ii)} misterio(\varepsilon)bcba =_{(i)} bcba$

b) Sea Σ^* definido inductivamente por:
   i. $\varepsilon \in \Sigma^*$
   ii. Si $\alpha \in \Sigma^*$, entonces $x\alpha \in \Sigma^*$ con $x \in \Sigma$

c) La función $misterio$ implementa un *reverse*, invierte las palabras de Σ^*

Ejercicio 3 (6 puntos)

Demuestre las siguientes consecuencias lógicas

a) $\psi \models ((\varphi \to \psi) \wedge \varphi) \vee \neg\varphi$
b) $\models ((p_0 \wedge p_1) \to \neg(p_2 \vee p_3)) \vee (\neg(p_2 \vee p_3) \to (p_0 \wedge p_1))$

Se demostrará una de las consecuencias lógicas mediante la definición de valuación y otra mediante tablas de verdad.

a) Debemos probar que para valuación v, cuando $v(\psi) = 1$ entonces $v(((\varphi \to \psi) \wedge \varphi) \vee \neg\varphi) = 1$.
Sea v una valuación tal que $v(\psi) = 1$.

$$v(((\varphi \to \psi) \wedge \varphi) \vee \neg\varphi) = \max\{v((\varphi \to \psi) \wedge \varphi), v(\neg\varphi)\}$$
$$= \max\{\min\{v(\varphi \to \psi), v(\varphi)\}, 1 - v(\varphi)\} = \max\{\min\{\max\{1 - v(\varphi), v(\psi)\}, v(\varphi)\}, 1 - v(\varphi)\}$$
$$= \max\{\min\{\max\{1 - v(\varphi), 1\}, v(\varphi)\}, 1 - v(\varphi)\} = \max\{\min\{1, v(\varphi)\}, 1 - v(\varphi)\}$$
$$= \max\{v(\varphi), 1 - v(\varphi)\} = 1$$

b) Sea $\varphi = (p_0 \wedge p_1)$ y $\psi = \neg(p_2 \vee p_3)$.

La proposición que debemos probar que es tautología se reduce a: $(\varphi \to \psi) \vee (\psi \to \varphi)$

φ	ψ	$(\varphi \to \psi)$	$(\psi \to \varphi)$	$(\varphi \to \psi) \vee (\psi \to \varphi)$
0	0	1	1	1
0	1	1	0	1
1	0	0	1	1
1	1	1	1	1

Ejercicio 4 **(9 puntos)**

Construya derivaciones para las siguientes consecuencias sintácticas:

a) $\vdash (\varphi \to \psi) \to (\varphi \to \psi \vee \sigma)$

b) $p_0 \vee p_1 \vdash (p_0 \wedge p_1) \to (p_0 \vee p_1)$

c) $\vdash (p_0 \wedge p_1) \to (p_0 \vee p_1)$

a)

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{(\varphi \to \psi)^{(2)} \qquad \varphi^{(1)}}{\psi}\,(E\to)}{\psi \vee \sigma}\,(I\vee)}{\varphi \to \psi \vee \sigma}\,(I\to)(1)}{(\varphi \to \psi) \to (\varphi \to \psi \vee \sigma)}\,(I\to)(2)$$

b)

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{(p_0 \vee p_1) \qquad (p_0 \wedge p_1)^{(1)}}{(p_0 \vee p_1) \wedge (p_0 \wedge p_1)}\,(I\wedge)}{(p_0 \wedge p_1)}\,(E\wedge)}{p_0}\,(I\vee)}{(p_0 \wedge p_1) \to (p_0 \vee p_1)}\,(I\to)(1)$$

c)

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{(p_0 \wedge p_1)^{(1)}}{p_0}\,(E\wedge)}{(p_0 \vee p_1)}\,(I\vee)}{(p_0 \wedge p_1) \to (p_0 \vee p_1)}\,(I\to)(1)$$

Ejercicio 5 **(6 puntos)**

Dé dos secuencias de formación distintas para cada una de las palabras de $PROP$:

a) $((p_0 \wedge p_1) \to (\neg p_0))$

b) $((\bot \to p_0) \wedge (\bot \to (\neg p_0)))$

a)

1. $p_0, p_1, (\neg p_0), (p_0 \wedge p_1), ((p_0 \wedge p_1) \to (\neg p_0))$
2. $p_0, p_1, (p_0 \wedge p_1), (\neg p_0), ((p_0 \wedge p_1) \to (\neg p_0))$

b)

1. $\bot, p_0, (\neg p_0), (\bot \to p_0), (\bot \to (\neg p_0)), ((\bot \to p_0) \wedge (\bot \to (\neg p_0)))$
2. $p_5, \bot, p_0, (\neg p_0), (\bot \to p_0), (\bot \to (\neg p_0)), ((\bot \to p_0) \wedge (\bot \to (\neg p_0)))$

Ejercicio 6 **(6 puntos)**

a) Sean $\varphi, \psi \in PROP$, demuestre que las proposiciones $(\varphi \vee \psi)$ y $\neg(\neg\varphi \wedge \neg\psi)$ son equivalentes

b) Calcule $((\neg p_0) \vee (\neg p_1))[(p_1 \to p_0) / p_0]$ y analice si la proposición que se obtiene es una tautología

a) Implica demostrar que $(\varphi \vee \psi) \leftrightarrow \neg(\neg\varphi \wedge \neg\psi)$ es tautología.

φ	ψ	$\neg\varphi$	$\neg\psi$	$(\varphi \vee \psi)$	$(\neg\varphi \wedge \neg\psi)$	$\neg(\neg\varphi \wedge \neg\psi)$	$(\varphi \vee \psi) \leftrightarrow \neg(\neg\varphi \wedge \neg\psi)$
0	0	1	1	0	1	0	1
0	1	1	0	1	0	1	1
1	0	0	1	1	0	1	1
1	1	0	0	1	0	1	1

De la tabla de verdad se desprende lo que queríamos probar.

b)
$$\begin{aligned}
&((\neg p_0) \vee (\neg p_1))[(p_1 \to p_0) / p_0] \\
&= (\neg p_0)[(p_1 \to p_0) / p_0] \vee (\neg p_1)[(p_1 \to p_0) / p_0] \\
&= \neg(p_0[(p_1 \to p_0) / p_0]) \vee \neg(p_1[(p_1 \to p_0) / p_0]) \\
&= \neg(p_1 \to p_0) \vee \neg p_1
\end{aligned}$$

La proposición no es una tautología, ya que para una valuación v en la cual $v(p_0) = 1$ y $v(p_1) = 1$:

$$\begin{aligned}
&v(\neg(p_1 \to p_0) \vee \neg p_1) \\
&= \max\{v(\neg(p_1 \to p_0)), v(\neg p_1)\} \\
&= \max\{1 - v(p_1 \to p_0), 1 - v(p_1)\} \\
&= \max\{1 - \max\{1 - v(p_1), v(p_0)\}, 1 - 1\} \\
&= \max\{1 - \max\{1 - 1, 1\}, 0\} \\
&= \max\{1 - \max\{0, 1\}, 0\} \\
&= \max\{1 - 1, 0\} = \max\{0, 0\} = 0
\end{aligned}$$

Ejercicio 7 **(12 puntos)**

Sea $\Sigma = \{a, b, c\}$ un alfabeto:

a) Defina inductivamente el lenguaje $L_1 \subseteq \Sigma^*$ de las palabras de Σ^* que comienzan con bac.

b) Defina una función $length : L_1 \to N$ que calcule el largo de una palabra de L_1

c) Enuncie el principio de inducción primitiva para L_1, y utilizándolo, demuestre que para toda palabra $\alpha \in L_1$ se cumple que $length(\alpha) > 2$

d) Defina inductivamente el conjunto $\Sigma^* \times \Sigma^*$

e) Defina una función $concat : \Sigma^* \times \Sigma^* \to \Sigma^*$ que concatene palabras de Σ^*.
Por ejemplo $concat(abb, cba) = abbcba$

a) Sea $L_1 \subseteq \Sigma^*$ el lenguaje definido inductivamente por:

i. $bac \in L_1$

ii. Si $\alpha \in L_1$, entonces $\alpha.x \in L_1$ con $x \in \Sigma$

b) Sea la relación $length : L_1 \to N$ definida recursivamente por:

i. $length(bac) := 3$

ii. $length(\alpha.x) := length(\alpha) + 1$

Sabemos que $length$ es función ya que la recursión es primitiva en L_1

c) Principio de inducción primitiva para L_1:

Sea P una propiedad sobre los elementos de L_1.
Si se cumple $P(bac)$ y que se cumpla $P(\alpha)$ implica que se cumple $P(\alpha.x)$; entonces podemos afirmar que se cumple $P(\alpha)$ para todo $\alpha \in L_1$

Siendo $P(\alpha)$ la propiedad $length(\alpha) > 2$ tenemos:

$length(bac) =_{(i)} 3$ y $3 > 2$ por lo cual se cumple $P(bac)$.
Si $length(\alpha) > 2$, entonces $length(\alpha.x) =_{(ii)} length(\alpha) + 1 > 2 + 1$ y $2 + 1 > 2$,
por lo que se verifica que el hecho de que se cumpla $P(\alpha)$ implica que se cumple $P(\alpha.x)$

De lo anterior, se cumple $P(\alpha)$ para todo $\alpha \in L_1$, o dicho de otra manera, para todo $\alpha \in L_1$ se cumple que $length(\alpha) > 2$

d) Sea el conjunto $\Sigma^* \times \Sigma^*$ definido inductivamente por:

i. $(\varepsilon, \varepsilon) \in \Sigma^* \times \Sigma^*$

ii. Si $(\varepsilon, \beta) \in \Sigma^* \times \Sigma^*$, entonces $(\varepsilon, y.\beta) \in \Sigma^* \times \Sigma^*$ con $y \in \Sigma$

iii. Si $(\alpha, \beta) \in \Sigma^* \times \Sigma^*$, entonces $(x.\alpha, \beta) \in \Sigma^* \times \Sigma^*$ con $x \in \Sigma$

e) Sea la relación $concat : \Sigma^* \times \Sigma^* \rightarrow \Sigma^*$ definida recursivamente por:

i. $concat(\varepsilon, \varepsilon) := \varepsilon$

ii. $concat(\varepsilon, y.\beta) := y.concat(\varepsilon, \beta)$

iii. $concat(x.\alpha, \beta) := x.concat(\alpha, \beta)$

Sabemos que $concat$ es función ya que la recursión es primitiva en $\Sigma^* \times \Sigma^*$