Carrera de Tecnólogo en Informática
Matemática Discreta y Lógica 1
Solución Segundo Parcial 18/12/07

Ejercicio 1 **20 puntos**

1. (a) $\epsilon \in L_1$
   (b) Si $\alpha \in L_1$ entonces $a\alpha b \in L_1$
2. (a) $cant_a(\epsilon) = 0$
   (b) $cant_a(a\alpha b) = 1 + cant_a(\alpha)$

   (a) $cant_b(\epsilon) = 0$
   (b) $cant_b(a\alpha b) = 1 + cant_b(\alpha)$
3. Sea P una propiedad definida sobre los elementos de L_1. Si se cumple:

   (a) $P(\epsilon)$
   (b) Si $P(\alpha)$ entonces $P(a\alpha b)$

   entonces P se cumple para todo $\alpha \in L_1$.
4. Sea $P(\alpha) = (cant_a(\alpha) = cant_b(\alpha))$.

   Aplico el principio de inducción primitiva para L_1:

   (a) $cant_a(\epsilon) = cant_b(\epsilon)$.
   (b) Supongo $cant_a(\alpha) = cant_b(\alpha))$. Tengo que demostrar $cant_a(a\alpha b) = cant_b(a\alpha b)$. Aplico la definición: $cant_a(a\alpha b) = 1 + cant_a(\alpha) = 1 + cant_b(\alpha) = cant_b(a\alpha b)$.
5. Sea $P(\alpha)$=(las letras a de α están a la izquierda de las letras b de α).

   Aplico el principio de inducción primitiva para L_1:

   (a) Se cumple pues no hay letras a ni b en ϵ.
   (b) Supongo las letras a de α están a la izquierda de las letras b de α. Tengo que demostrar que las letras a de $a\alpha b$ están a la izquierda de las letras b de $a\alpha b$.

   La letra a que aparece a la izquierda de α está a la izquierda de todas las otras letras de $a\alpha b$, como además las letras a de α están a la izquierda de las letras b de α, todas las letras a de $a\alpha b$ están a la izquierda de todas las letras b.

La letra b que aparece a la derecha de α está a la derecha de todas las otras letras de $a\alpha b$, como además las letras b de α están a la derecha de las letras a de α, todas las letras b de $a\alpha b$ están a la derecha de todas las letras a.

Ejercicio 2 **4 puntos**

1. $triple(0) = 0$
2. $triple(n+1) = triple(n) + 3$

Ejercicio 3 **5 puntos**

1. (a) Por el correspondiente paso base $p_0, p_1 \in Prop$
   (b) Por el correspondiente paso inductivo $(p_0 \rightarrow p_1) \in Prop$
   (c) Por el correspondiente paso inductivo $(p_0 \vee p_1) \in Prop$
   (d) aplicando el paso inductivo a las proposiciones anteriores: $((p_0 \rightarrow p_1) \wedge (p_0 \vee p_1)) \in Prop$
2. Una secuencia de formación posible es:

   $p_0, p_1, (p_0 \vee p_1), (p_0 \rightarrow p_1), ((p_0 \rightarrow p_1) \wedge (p_0 \vee p_1))$

Ejercicio 4 **10 puntos**

1.

ϕ	ψ	$\neg\phi$	$\neg\psi$	$(\phi \rightarrow \psi)$	$(\neg\psi \rightarrow \neg\phi)$
0	0	1	1	1	1
0	1	1	0	1	1
1	0	0	1	0	0
1	1	0	0	1	1

2. $(p_0 \wedge p_1)[(\neg\phi)/p_0] =$
   $(p_0[(\neg\phi)/p_0]) \wedge (p_1[(\neg\phi)/p_0]) =$
   $(\neg\phi) \wedge p_1$

Ejercicio 5 **8 puntos**

Demuestre las siguientes consecuencias lógicas utilizando la definición de valuación:

1. Supongo $v((\neg\phi) \vee \psi)) = 1$ y $v(\phi) = 1$. Por la definición de valuación para el $\vee$, $max(v(\neg\phi), v(\psi)) = 1$ lo que es lo mismo (por defínción de valuación para el $\neg$) que $max(1 - v(\phi), v(\psi)) = 1$. Como $v(\phi) = 1$, entonces $1 - v(\phi) = 0$, luego $max(0, v(\psi)) = 1$ implica $v(\psi) = 1$.
2. Supongo $v(\neg(\phi \wedge (\neg\psi))) = 1$. Luego $1 - v(\phi \wedge (\neg\psi)) = 1$. Entonces $v(\phi \wedge (\neg\psi)) = 0$. Por la definición de valuación para el $\wedge$, $min(v(\phi), v(\neg\psi)) = 0$.

   Supongo $v(\phi)$=1, luego $v(\neg\psi) = 0$ y entonces $v(\psi) = 1$. Si $v(\phi)$=1 y $v(\psi) = 1$, entonces $v(\phi \to \psi) = max(1 - v(\phi), v(\psi)) = 1$.

   Supongo $v(\phi)$=0, entonces $v(\phi \to \psi) = max(1 - v(\phi), v(\psi)) = 1$.

Ejercicio 6 **12 puntos**

(1)

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\phi \quad (\neg\ \cancel{\phi})}{\bot}}{(\neg(\neg\phi))} \qquad \dfrac{\dfrac{(\neg(\cancel{\phi})) \quad \neg(\neg\phi)}{\bot}}{\phi}}{(\neg(\neg\phi)) \leftrightarrow \phi}$$

(2)

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\phi \to \cancel{(}\psi \to \sigma) \qquad \dfrac{\phi\ \cancel{\wedge}\psi}{\phi}}{\psi \to \sigma} \qquad \dfrac{\phi\ \cancel{\wedge}\psi}{\psi}}{\sigma}}{(\phi \wedge \psi) \to \sigma}}{(\phi \to (\psi \to \sigma)) \to ((\phi \wedge \psi) \to \sigma))}$$

(3)

$$\dfrac{\dfrac{(\psi \vee \phi) \qquad \dfrac{\cancel{\psi}}{(\phi \vee \psi)} \qquad \dfrac{\cancel{\phi}}{(\phi \vee \psi)}}{(\phi \vee \psi)} \qquad\qquad \dfrac{(\phi \vee \psi) \qquad \dfrac{\cancel{\phi}}{(\psi \vee \phi)} \qquad \dfrac{\cancel{\psi}}{(\psi \vee \phi)}}{(\psi \vee \phi)}}{(\phi \vee \psi) \leftrightarrow (\psi \vee \phi)}$$