Carrera de Tecnólogo en Informática
Matemática Discreta y Lógica 1
Solución Examen 25/02/08

Ejercicio 1 **6 puntos**

Sea $A = \{a, b, d, f\}$ y $B = \{b, c, e, g, a\}$.
Respuesta correcta : 1) $A \cap B = \{a, b\}$

Ejercicio 2 **8 puntos**

1. Reflexiva. Una persona tiene el mismo color de pelo que si misma.
2. Simétrica. Si una persona tiene el mismo color de pelo que una segunda, la segunda tiene el mismo color de pelo que la primera.
3. Transitiva. Si una persona tiene el mismo color de pelo que una segunda, y la segunda tiene el mismo color de pelo que una tercera, entonces la primera tiene el mismo color de pelo que la tercera.

Hay al menos 3 colores de pelo diferentes: rubio, castao, pelirrojo luego el conjunto cociente tiene al menos 3 elementos.

Ejercicio 3 **9 puntos**

$f : N \times N \to Z$, $f(x, y) = x - y$,

1. es f inyectiva?

   $f(4, 2) = f(6, 4) = 2$ y $(4, 2) \neq (6, 4)$ luego no es inyectiva.

2. es f sobreyectiva?

   Sea $z \in Z$ luego $z < 0$ o $z = 0$ o $z > 0$.
   Si $z <= 0$ entonces $f(0, |z|) = z$,
   Si $z = 0$ entonces $f(0, 0) = 0$ Si $z > 0$ entonces $f(z, 0) = z$

3. es f invertible?
   Como no es inyectiva no es biyectiva y por lo tanto no es invertible.

Ejercicio 4 **8 puntos**

1. Reflexiva. para todo conjunto A, $A \subseteq A$ (los elementos de A están incluidos en A).
2. Antisimetrica. si $A \subseteq B$ y $B \subseteq A$ entonces $A = B$ (si los elementos de A están incluidos en B y los elementos de B están incluidos en A entonces A y B son iguales).
3. Transitiva. $A \subseteq B$ y $B \subseteq C$ entonces $A \subseteq C$. (si los elementos de A están incluidos en B y los elementos de B están incluidos en C entonces los elementos de A están incluidos en los de C).

Ejercicio 5 **10 puntos**

$a_0 = 0$
$a_1 = 1$
$a_n + a_{n-1} - 6a_{n-2} = 0$ $\quad n \geq 2$

Resuelvo la ecuación: $r^2 + r - 6 = 0$.

$$r = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 + 24}}{2} = \frac{-1 \pm 5}{2}$$

luego las soluciones de la ecuación son $r = 2$ y $r = -3$.
Esto da como solución general de la recurrencia:

$$a_n = p.2^n + q.(-3)^n$$

Para hallar la solución particular resuelvo el sistema:

$a_0 = p + q = 0$

$a_1 = 2.p - 3.q = 1$

obtenemos $p = 1/5$ y $q = -1/5$.

Esto da como solución particular de la recurrencia:

$$a_n = 1/5.2^n + (-1/5).(-3)^n$$

Ejercicio 6 **36 puntos**

1. (a) $\epsilon \in L_1$

(b) Si $\alpha \in L_1$ entonces $a\alpha a \in L_1$

2. (a) $cant_a(\epsilon) = 0$
   (b) $cant_a(a\alpha a) = 2 + cant_a(\alpha)$

3. Sea P una propiedad definida sobre los elementos de L_1. Si se cumple:

   (a) $P(\epsilon)$
   (b) Si $P(\alpha)$ entonces $P(a\alpha a)$

   entonces P se cumple para todo $\alpha \in L_1$.

4. Sea $P(\alpha) = (cant_a(\alpha) espar)$.

   Aplico el principio de inducción primitiva para L_1:

   (a) $cant_a(\epsilon) = 0$ es par.
   (b) Supongo $cant_a(\alpha) espar$. Tengo que demostrar $cant_a(a\alpha a) espar$. Aplico la definición: $cant_a(a\alpha a) = 2 + cant_a(\alpha)$ como la suma de pares es par $cant_a(a\alpha a)$ es par.

Ejercicio 7 **6 puntos**

ϕ	ψ	$\neg\phi$	$\phi \to \psi$	$\neg\phi \vee \psi$
0	0	1	1	1
0	1	1	1	1
1	0	0	0	0
1	1	0	1	1

Ejercicio 8 **8 puntos**

Supongo $v(\phi \to \psi) = 1$ y $v(\phi) = 1$. Como $v(\phi \to \psi) = max(1 - v(\phi), v(\psi)) = 1$ y $1 - v(\phi) = 0$ debe ser $v(\psi) = 1$.

Ejercicio 9 **8 puntos**

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\phi \to \psi \cancel{\wedge} \psi \to \sigma}{\phi \to \psi} \quad \cancel{\phi}}{\psi} \qquad \dfrac{\phi \to \psi \cancel{\wedge} \psi \to \sigma}{\psi \to \sigma}}{\sigma}}{(\phi \to \sigma)}}{((\phi \to \psi) \wedge (\psi \to \sigma)) \to (\phi \to \sigma)}$$